臺北市立第一女子高級中學 115 學年度第一次正式教師甄選

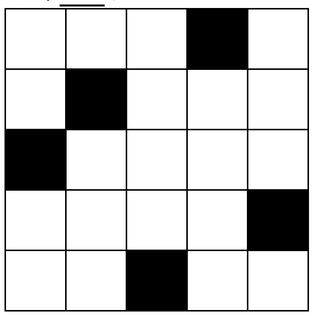
數學科測驗題試題暨答案

一、填充題（每格 8 分，共 72 分）

1. 已知函數 $f(x)=a\sin x+b\cos x+c$ （$0\le x<2\pi$）的最大值為 7，最小值為 3，且最大值發生在 $x=\dfrac{\pi}{3}$，則序對 $(a,b,c)=$ $\underline{(\sqrt{3},1,5)}$ 。

2. 已知 $n\ge 2$ 時，數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足：$\sqrt{4n^2-10}+5n<a_n<7n+10$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(a_n+3n)^2}{na_n+3n^2-8}=$ $\underline{10}$ 。

3. 將 5 枚棋子放在 5×5 的方格中（如下圖），規定每一行與每一列最多只能擺放一枚棋子，且不能放在黑色小方格內，則共有 $\underline{44}$ 種放法。



4. 設 $k>0$，若方程式 $(x+ki)^6=64i$（其中 $i=\sqrt{-1}$）有實數解，則所有 k 的可能值總和為 $\underline{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ 。

5. 有兩數列 $\langle a_n\rangle,\langle b_n\rangle$，已知 $\langle b_n\rangle$ 是公比為 $\dfrac{1}{5}$ 的等比數列，且 $a_n{}^5=5b_n{}^5$，則 $\sum\limits_{k=1}^{10}\log(\dfrac{a_3}{b_k})=$ $\underline{27\log 5}$。

6. 已知 ΔABC 中，點 D 為 $\overline{BC}$ 上一點，滿足 $\angle BAD=2\angle DAC$，若 $\overline{CD}=2,\ \overline{AD}=3,\ \overline{AC}=4$，則 $\overline{BD}=$ $\underline{\dfrac{7}{2}}$ 。

7. 已知直角三角形 ABC 中，$\angle C=90^\circ$，且 $\overline{CA}=20,\ \overline{CB}=26$。令 Γ_1 為 ΔABC 的外接圓，再作一圓 Γ_2 與 $\overline{CA}$ 、$\overline{CB}$ 均相切，且與 Γ_1 內切，則 Γ_2 的半徑長為 $\underline{46-2\sqrt{269}}$ 。

8. 空間中有四個點 O,A,B,C，其中三向量 $\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}$ 兩兩夾角皆為 30°，已知 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=3,\ \left|\overrightarrow{OB}\right|=4,\ \left|\overrightarrow{OC}\right|=5$，則 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 張出的**四面體**體積為 $\underline{5\sqrt{3\sqrt{3}-5}}$ 。

9. 已知數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足遞迴式 $(2-a_{n+1})(4+a_n)=8$，且 $a_1=\dfrac{1}{2}$，則 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}$ 的一般式為 $\underline{\dfrac{5}{2}\cdot2^n-\dfrac{1}{2}n-\dfrac{5}{2}}$ 。（以 n 表示）

二、計算證明題（共 75 分，需寫出計算過程，否則不予計分）

1. （12 分）小綠寫作業，解不等式$2x-1\ge|x-3|$，她的過程如下：

$$2x-1\ge|x-3| \quad \Rightarrow 4x^2-4x+1\ge x^2-6x+9$$
$$\Rightarrow 3x^2+2x-8\ge 0$$
$$\Rightarrow (3x-4)(x+2)\ge 0$$
$$\Rightarrow x\ge\frac{4}{3} \ \vee \ x\le -2$$

(1)如果您是小綠的老師，請指出錯誤之處？該如何向她解釋？
(2)請用三種不同的方法，教導學生解不等式$|x-1|\ge|2x-5|$。

2. （12 分）請分別針對「高一」、「高二」、「高三」的學生，各提供一種講解此題的方法。

設點 P 為$\Gamma: y=\frac{1}{2}x^2+2x+3$ 上之一點，$A(1,-1),B(3,2)$ 為Γ 外之兩點，試求ΔABP 面積之最小值。

3. （13 分）小綠解一道題目：

空間中兩點 $A(-1,-8,9)$、$B(-17,13,1)$，設直線 $L:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{2}$ 上有一動點 P，試求$\overline{PA}+\overline{PB}$之最小值，並求出此時$P$點坐標為何？

小綠的解題過程：先求 A,B 在 L 上的投影點 $A'(1,0,3)$, $B'(-5,-3,-3)$，

以及 A 對 L 之對稱點 $C(3,8,-3)$，因為 $\overline{PA}=\overline{PC}$，所以最小值 $\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PC}+\overline{PB}\ge\overline{BC}=21$，

因為$\Delta AA'P\sim\Delta BB'P$，且 $\overline{AA'}=2\sqrt{26}$，$\overline{BB'}=4\sqrt{26}$，$\overline{CP}:\overline{PB}=\overline{PA}:\overline{PB}=\overline{AA'}:\overline{BB'}=1:2$，

所以由內分點公式可得 $P(-\frac{11}{3},\frac{29}{3},-\frac{5}{3})$。

(1)如果您是小綠的老師，請指出錯誤之處？該如何向她解釋？
(2)請解出正確的答案。

Ans：(2) $3\sqrt{113}$，　$P(-1,-1,1)$

4. （12 分）設二次函數 $y=k-x^2$（其中$0\le k\le 4$）、$x=0$、$x=2$、與 x 軸所圍的封閉區域為 A。當 $k=a$ 時，A 的面積有最小值 b，試求數對(a,b)為何？

Ans：$(1,2)$

5. （13 分）已知 n 為正整數，考慮由 $a_k \in \{1,-1\}$ 所決定的 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k 2^k$ 。

(1)試找出一組 $a_1, a_2, \cdots, a_{11} \in \{1,-1\}$ ，使得 $S_{11} = 2026$ 。

(2)證明(1)中該組 $a_1, a_2, \cdots, a_{11}$ 是唯一的。

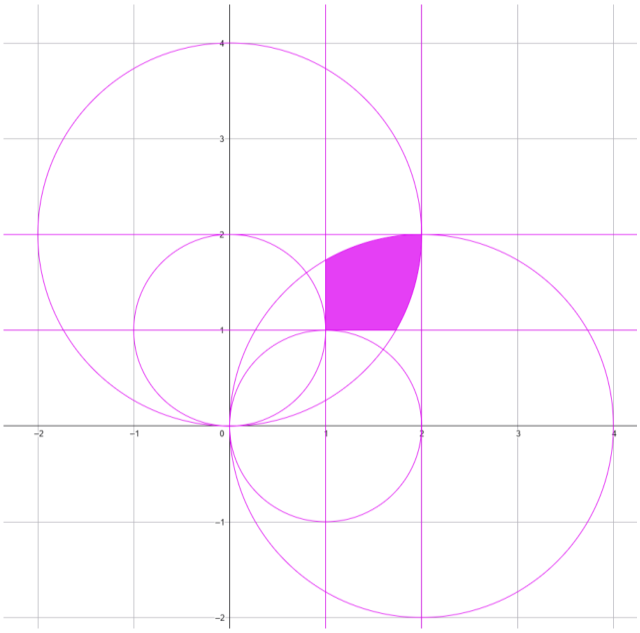
Ans：(1) $a_1 = a_3 = a_{10} = -1$ ， $a_2 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = a_{11} = 1$

6. （13 分）設複數平面上滿足「z 和 $\dfrac{4}{\overline{z}}$ 的實部和虛部皆在區間 $[1,2]$ 中」所形成的封閉區域為 A 。（其中 $\overline{z}$ 為 z 的共軛複數）

(1)試在複數平面上畫出 A 的圖形。

(2)試以定積分表示 A 的面積，並求出其值。

Ans：(1)



(2) 定積分表示 A 的面積為 $1 - 2\int_1^2 2 - \sqrt{4-(x-2)^2}\,dx$ 或

$$\int_1^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-(x-2)^2} - 1 \right) dx + \int_{\sqrt{3}}^{2} \left(\sqrt{4-(x-2)^2} - \left(2 - \sqrt{4-x^2} \right) \right) dx$$

$$A = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} - 3$$