

三、計算、證明題 (30 分)

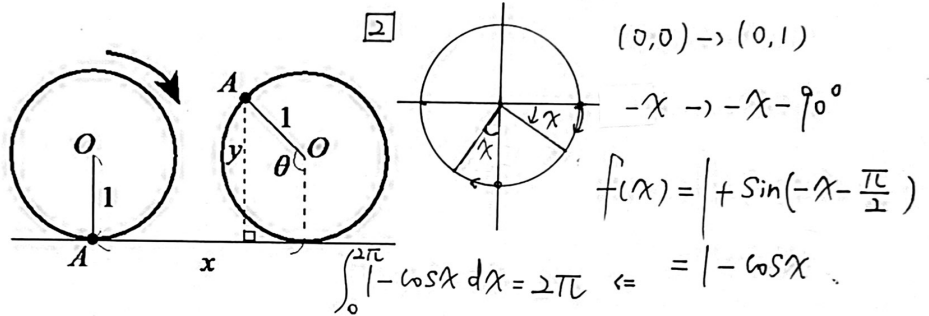
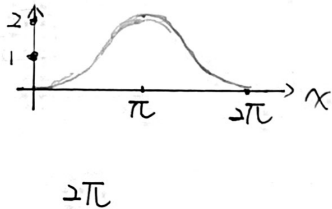
1. 設 $x = \log \sqrt{2-\sqrt{3}}$ ，利用 $\sqrt{2}$ 是無理數，試證： 0.1^x 為無理數。 114 南港高工 2 招

□ 0.1^x

$$\Rightarrow 6 = (\sqrt{6})^2 = (2k - \sqrt{2})^2 = 4k^2 + 2 - 4k\sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{10 \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6+2}}{2} \stackrel{\text{令}}{=} k \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{k^2-1}{k} \in \mathbb{Q} \quad *$$

2. 有一個在水平地面上的圓形輪子，其半徑為 1 單位長。輪子上 A 點與地面接觸，如下圖所示，當輪子向右滾動，相對於圓心 O 而言，A 點以順時針轉動 θ 角，且輪子中心 O 前進 x 單位長的時候，A 點距離地面的高度為 y 單位長。在坐標平面上，若在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 的範圍中， y 可以表示為 x 的函數 $f(x)$ ，請畫出 $y=f(x)$ 的圖形？並求 $\int_0^{2\pi} f(x) dx = ?$



3. 已知兩多項式函數 $y=f(x)$ 、 $y=g(x)$ 滿足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+g(x)}{x} = 7$ ， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+g(x)}{x \cdot f(x)} = 5$ 。

□ 令函數 $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ ，則 $h'(0) = ?$

當 $x \rightarrow 0$ ，分母 $\rightarrow 0$ ， $2+(-2)$
 { 極限存在 $\begin{cases} f(0)+g(0)=0 \\ 2+g(0)=0 \end{cases}$

$$f'(0) + g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) + g(x) - g(0)}{x - 0} = 7$$

$$g'(0) \cdot \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{(x-0) \cdot f(x)} = 5$$

$$f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = -3(-2) + 2 \cdot 10 = 26$$

4. 設 a 、 b 為實數， $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$ 是一個三次函數，若方程式 $f(x) = 0$ 有兩個虛根 α 與 $\frac{\alpha^2 + 4}{2}$ ，試求：

(1) $|\alpha|$ 的值。 $\Rightarrow \sqrt{2}$ (2) $y=f(-x+3)$ 的圖形的對稱中心。 $(-2, -44)$

令 $\alpha = c + di$ 3根: $-1 + \sqrt{7}i, -1 - \sqrt{7}i, 5 \Rightarrow b = -5 \cdot 8 = -40$

□ $\frac{c^2 - d^2 + 4 + 2cdi}{2} = c - di$ $\begin{array}{r|l} 1-3+a & -40 \\ +5+10 & 5a+50 \end{array} \Bigg| 5$ $a = -2$

$$\Rightarrow c = -1, 5 - d^2 = -2$$

$$d = \pm \sqrt{7}$$

$$\Rightarrow |\alpha| = \sqrt{2}$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x - 40$$

$$\Rightarrow \text{j.p. } (1, -44)$$

試題結束

$x \rightarrow -x+3 \Rightarrow (-2, -44) \neq$
 $1 \rightarrow -1+3$