臺北市立南港高工114學年度第2次教師甄選筆試命題試題紙

甄選科別：一般類科　　科目：數學科

作答說明

1. 請使用藍、黑原子筆，並於答案卷作答。
2. 填充題答案若為分數或根式，請化簡至最簡。
3. 計算、證明與論述題請標明題號，標示不清者不予計分。
4. 參考數值：$\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$, $\log_{10}7=0.8451$。

一、 填充題（60分，每格5分）

2026.3.4(三)～3.8(日) Ru
(dark times)

1. 在坐標平面上，已知函數 $y=\log x$ 與直線 $x=\dfrac{2a+1}{4-a}$ 圖形的交點在第一象限，試求實數 a 的範圍 $\boxed{1}$

$1<a<4$

$\dfrac{2a+1}{4-a}>1 \Rightarrow \dfrac{3a-3}{a-4}<0 \Rightarrow 1<a<4$

2. 隨機將編號 $1, 2, \ldots, 7$ 的七張卡片由左至右排成一列，恰有二張卡片所排的**順序號**與它的編號相同的機率為＿＿＿＿。 $\boxed{2}$

$\dfrac{11}{60}$

$\dfrac{C^7_2\,(5!-5\cdot4!+10\cdot3!-10\cdot2!+5\cdot1!-1\cdot0!)}{7!}=\dfrac{21\cdot44}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}=\dfrac{11}{60}$

3. 坐標平面上，拋物線 Γ：$(y+2)^2=-4x+4$ 及點 $A(1,-2)$。設 $\overline{PQ}$ 為 Γ 的一焦弦且與其對稱軸夾 $60°$，求 $\triangle APQ$ 的面積為 $\boxed{3}$

$\dfrac{4\sqrt3}{3}$

(0,1) $60°$ $(2\sqrt3,3)$ (0,0) $\left(-\dfrac{2\sqrt3}{3},\dfrac13\right)$

$\begin{cases}x^2=4y\\ x-\sqrt3y=-\sqrt3\end{cases} \Rightarrow 3(y^2-2y+1)=4y \Rightarrow 3y^2-10y+3=0$

$\Delta=\dfrac12\left|\begin{matrix}2\sqrt3 & 3\\ -\dfrac{2\sqrt3}{3} & \dfrac13\end{matrix}\right|=\dfrac{4\sqrt3}{3}$

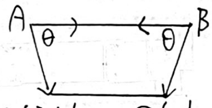
4. 設 $\sec\theta+\csc\theta=1$，求 $\sec\theta\csc\theta$ 之值為＿＿＿＿ $\boxed{4}$

$-\sqrt2-1$

$S+C=SC\in[-\sqrt2,\sqrt2] \Rightarrow 1+2SC=(SC)^2 \Rightarrow SC=1-\sqrt2$ or $1+\sqrt2$ (不合) $\Rightarrow \dfrac{1}{SC}=\dfrac{1}{1-\sqrt2}=-1-\sqrt2$

5. 已知空間中**等腰梯形** $ABCD$ 的三個頂點坐標為 $A(1,-2,2)$, $B(9,-6,10)$, $D(3,1,6)$，其中 $\overline{AB}//\overline{DC}$，試求頂點 C 的坐標為 $\boxed{5}$

$(7,-1,10)$



$\overrightarrow{AB}//(2,-1,2)=\vec{u}$

$\overrightarrow{AD}\cdot\vec{u}=\overrightarrow{BC}\cdot(-\vec{u})$

$\Rightarrow(2,3,4)\cdot(-2,1,-2)=(2t-6,-t+7,2t-4)\cdot(2,-1,2)$

$\Rightarrow 9t=18 \Rightarrow t=2 \Rightarrow (7,-1,10)$

6. 設 a，b 為正實數，已知 $a+b+\dfrac1a+\dfrac9b=10$ 有最小值時，則 $a+b$ 的最大值為 M，最小值為 m，求數對 $(M,m)=$ $\boxed{6}$

$(8,2)$

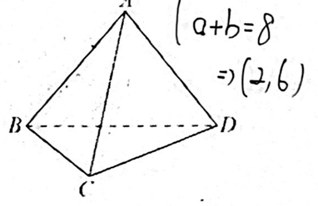
$16\le(a+b)\left(\dfrac1a+\dfrac9b\right)=k(10-k)$

令 $k=a+b$ $\Rightarrow k^2-10k+16\le0 \Rightarrow 2\le k\le8$

$\begin{cases}a=\dfrac b3\\ a+b=2\end{cases} \Rightarrow\left(\dfrac12,\dfrac32\right)$

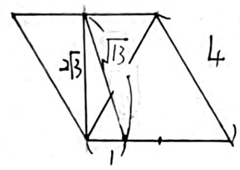
$\begin{cases}a=\dfrac b3\\ a+b=8\end{cases} \Rightarrow(2,6)$

7. 右圖為正四面體 $A\text{-}BCD$ 積木，稜長均為 8，設 $\overline{CD}$ 邊上有一點 H，且 $\overline{CH}:\overline{HD}=1:3$，若 H 點上有一隻螞蟻要沿著積木表面走到對邊 $\overline{AB}$ 的中點 N，則牠所走的最短距離為＿＿＿＿。



$2\sqrt{13}$

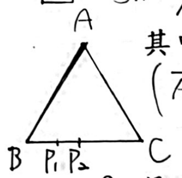
$\boxed{7}$



$\times2$
$\Rightarrow 2\sqrt{13}$

8. 設邊長為 1 的正△ABC 中，$\overline{BC}$ 上有 n 等分點 $P_1,P_2,\cdots,P_{n-1}$，即 $\overline{BP_1}=\overline{P_1P_2}=\cdots=\overline{P_{n-1}C}$，

$\boxed{8}$ $5n^2-2/6n$



其中 $n\ge 2$，令向量內積和 $S_n=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_1}+\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{AP_2}+\cdots+\overrightarrow{AP_{n-1}}\cdot\overrightarrow{AC}$。試求 S_n 的值 $=\frac{n}{2}+\frac{n^2-1}{3n}$

$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP_{k-1}})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP_k})=1-\frac{1}{2}\left(\frac{k-1}{n}+\frac{k}{n}\right)+\frac{k}{n}\cdot\frac{k-1}{n}\Rightarrow n-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\cdot 2-1\right)+\frac{(n-1)n(n+1)}{3n^2}=\frac{5n^2-2}{6n}$

$\theta=120^\circ$

9. 設 I 為單位矩陣，已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix}2&1\\0&-1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-1&0\\0&2\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}s&1\\t&1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，

$\frac{1}{2}$

且 $PA=BP$，$a,b,c,d,s,t\in R$。若 $ACA+PCP=ACP+PCA+I$，則 $a+d=$ $\Rightarrow 16C=4I$

$\boxed{9}$ $\begin{bmatrix}s&1\\t&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s&1\\t&1\end{bmatrix}\Rightarrow s=0,\ t=3$ $(A-P)C(A-P)=I$ 令 $M=A-P=\begin{bmatrix}2&0\\-3&-2\end{bmatrix}$ $M^2=\begin{bmatrix}2&0\\-3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\-3&-2\end{bmatrix}=4I\Rightarrow C=\frac{1}{4}I\Rightarrow\frac{1}{2}$ #

10. 某次考試，老師出了一張滿分為 100 分的試卷，但因考後成績不理想，因此進行全班

45

$(e\fallingdotseq 2.718)$ 成績調整，若原始成績為 x 分，則調整後成績為 $50\cdot\log_{10}x$ 的**整數**部分。已知這次考

$\boxed{10}$ $\log e\fallingdotseq 0.434$ 試沒有人缺考且最低分數為 2 分，則以這種方式，調整後**最多**能比原分數增加 k 分，

令 $f(x)=50\log x-x$ 求 k 之值為 $f'(x)=0\Rightarrow\frac{50}{x\ln 10}-1=0\Rightarrow x=50/\ln 10=50\log e\fallingdotseq 50\times 0.434=21.7$

$\log 2$ 0.301 $\log 2.7$ $\log 3$ 0.4771 $0.7\times 0.176+0.301=0.424$ $[50\log 21-21]=45$

11. 已知複數 z 滿足 $\left|z+\sqrt{3}i\right|+\left|z-\sqrt{3}i\right|=4$，則 $|z-i|$ 的最小值為________。

$\sqrt{6}/3$ $\boxed{11}$ $a=2,\ c=\sqrt{3},\ b=1$ $P(2C,S)$ $A(1,0)$ $(2C-1)^2+S^2=3C^2-4C+2\ge\frac{8}{4\cdot 3}=\frac{6}{9}\Rightarrow\frac{\sqrt{6}}{3}$

12. 已知現有的 A、B、C、D、E、F 六戶人家的相對位置如右圖所示，除了 F、A 與 F、C

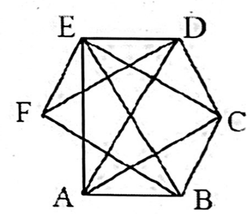
28 與 B、D 之間沒有道路相通外，其餘任兩戶之間均有道路相通。若小南希望從 A 出發

後拜訪各戶恰一次後再回到 A (任兩戶間只走連接兩戶的直線道路)，

試問他的走法有________種。$5!-(4!\cdot 2+4!\cdot 2+4!\cdot 2-3!\cdot 2-3!\cdot 2\cdot 2-3!\cdot 2\cdot 2+2\cdot 2\cdot 2)$

$\boxed{12}$ A BCDEF A

$=120-144+60-8=28$

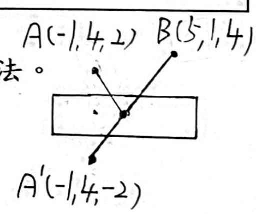


二、 統測試題講解 (10 分)

1. 某一年數學測驗的題目如下：

> 空間中兩點 $A(-1,4,2)$ 與 $B(5,1,4)$，若 xy 平面上 P 點到 A 與 B 兩點的距離和為最小，則 P 點的坐標為何？ $p(1,3,0)$

試寫出此題**詳細的**解題步驟，並加以說明你如何引導學生這一題的解法。



$\boxed{1}$ $P(-1+6t,4-3t,-2+6t)$ $\parallel$ 0

$t=\frac{1}{3}\Rightarrow(1,3,0)$

2. 某一年數學測驗的題目如下：

> 若 $P(x,y)$ 為橢圓 $4x^2+6y^2-12y-6=0$ 上任意一點，則 $x+3y$ 的最大值為何？ $3+\sqrt{21}$

試寫出此題**詳細的**解題步驟，並加以說明你如何引導學生這一題的解法。

$\boxed{2}$ $\frac{x^2}{3}+\frac{(y-1)^2}{2}=1$ $\sqrt{3}C+3(\sqrt{2}S+1)\le 3+\sqrt{21}$