臺北市立中崙高級中學 114 學年度第二次教師甄選數學科筆試試題卷

考生序號：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

※注意：請務必於上欄填寫「考生序號」及「姓名」

請於答案卷作答區作答，並標明題號 1. 2. …… 12. 。

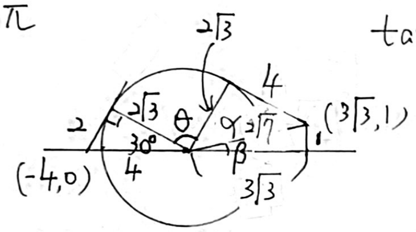
一、填充題（每格 7 分，共 77 分） 2026.2.28(六) ~ 3.3(二) Ru

1.已知平面上某公園內有一圓 $C: x^2+y^2=12$，圓 C 的內部是禁止踐踏的草皮。

阿中在點 $A(-4,0)$ 要去與位於點 $B(3\sqrt{3},1)$ 的阿崙會合，則

他在不違規踐踏圓 C 內部草皮的前提下，可以走的最短路徑長為＿＿＿＿＿。

$6+\sqrt{3}\pi$



$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\frac{7}{3\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha+\beta = 60°,\ \theta = 90°$

$6 + r\theta = 6 + \sqrt{3}\pi$

2.已知 n 為正整數，且 2025！整除 $(n!)!$，則 n 的最小值為＿＿＿＿＿。

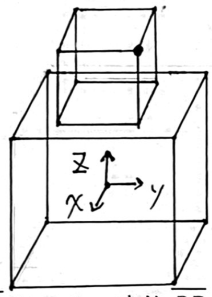
7

$2025! \mid (n!)! \Leftrightarrow 2025 \le n! \quad \Rightarrow n = 7$

$(\ a! \mid b! \Leftrightarrow a \le b\ )$

3.阿崙有一個正立方體 A 的捏陶作品，其邊長為 1；假設其外接球面為 S。
阿崙想要在這一個正立方體 A 的某個面上，再放置一個邊長為 a 的小正立方體 B，但是 B 不能碰到 S 的外部，則 a 的最大值為＿＿＿＿＿。

$\frac{1}{3}$



$P\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, a+\frac{1}{2}\right) \quad R = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{3}{4} = \frac{2a^2+4a^2+4a+1}{4}$

$\Rightarrow 3a^2+2a-1=0 \quad \begin{matrix} 3 & -1 \\ 1 & +1 \end{matrix} \quad \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

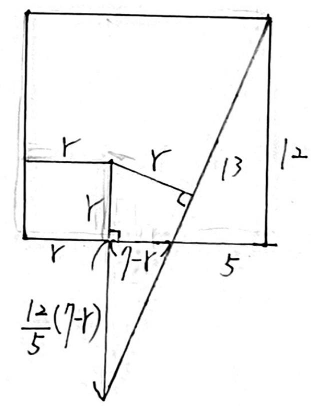
4.已知 $ABCD$ 為正方形，P 為 $\overline{BC}$ 上一點，連接 $\overline{PD}$。正方形 $ABCD$ 內部有一圓 Γ 與 $\overline{AB}$、$\overline{BP}$、$\overline{PD}$ 均相切。

若 $\overline{PC}=5$、$\overline{CD}=12$，則圓 Γ 的半徑長為＿＿＿＿＿。

$\frac{21}{5}$

$\frac{84-12r+5r}{5} = \frac{13r}{5}$

$\Rightarrow r = \frac{21}{5}$



5.已知阿崙有 50 張卡牌，上面分別寫著編碼1,2,3,⋯,50號。阿崙隨機洗牌後，將所有卡牌由上而下疊成一疊，假設編碼 20 號卡牌與編碼 25 號卡牌之間有 X 張卡牌（不含編碼 20 號與編碼 25 號的卡牌），則 X 的期望值為＿＿＿＿＿。

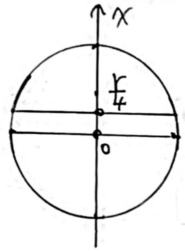
16

$$\frac{50-2}{3}=16$$ #

V 20 V 25 V

6.阿崙有一個半徑 20 公分的球形容器放置在水平面上，其內部中空，且材質厚度不計。如果他往裡面注水，使得容器內水面的高度為 25 公分，則他注入的水量為＿＿＿＿＿立方公分。

$\frac{21875\pi}{3}$

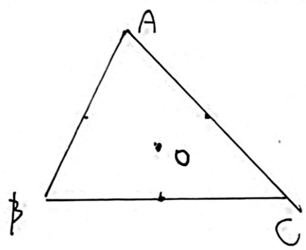


$$\pi\int_0^{\frac{r}{4}}(r^2-x^2)\,dx+\frac{2}{3}\pi r^3$$

$$\pi r^3\left(\frac{3\times16}{4\times3\times16}-\frac{1}{3\times64}+\frac{2\times64}{3\times64}\right)=\pi\cdot\frac{175\times20\times20\times20}{3\times64}=\frac{21875\pi}{3}$$

7.已知△ABC 中，$\overline{AB}=20$ 且 $\overline{AC}=25$。令 G 與 O 分別為△ABC 的重心與外心，則 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AO}$ 的最大值為＿＿＿＿＿。

$\frac{1025}{6}$

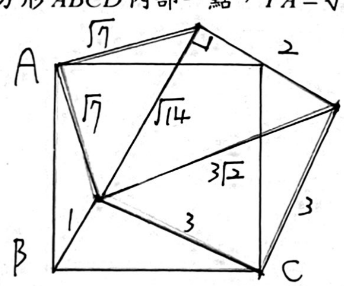


$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AO}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(20^2+25^2)=\frac{1025}{6}$$

8.已知 P 為正方形 $ABCD$ 內部一點，$\overline{PA}=\sqrt{7}$，$\overline{PB}=1$，$\overline{PC}=3$，試求此正方形面積為＿＿＿＿＿。

$8+\sqrt{14}$



$\Rightarrow 8+\sqrt{14}$

9.已知△ABC 的頂點 $A(-4,2)$，二條中線所在直線方程式分別為 $3x-2y+2=0$ 和 $3x+5y-12=0$，試求另二頂點坐標為＿＿＿＿＿。

(4,0) (2,4)

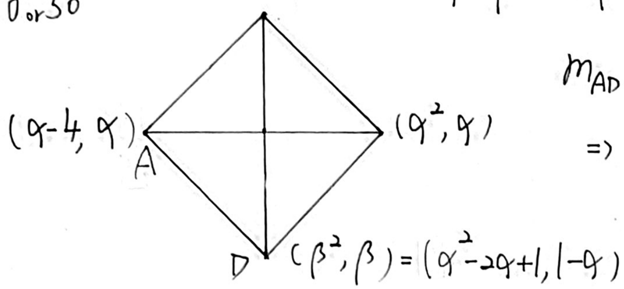
令 $B\left(x_1,\frac{3x_1+2}{2}\right)$，$C\left(x_2,\frac{-3x_2+12}{5}\right)$ $\quad \begin{cases}L_1\\L_2\end{cases}\Rightarrow G\left(\frac{2}{3},2\right)$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=6\\15x_1-6x_2=6\end{cases}\Rightarrow B(2,4),\ C(4,0)$$

10.已知一正方形 $ABCD$ 的頂點 A 、 B 二點落在直線 $y=x+4$ 上，頂點 C 、 D 二點落在拋物線 $x=y^2$ 上，求此正方形的面積為__________。

18 or 50

$\alpha^2-\beta^2=\alpha-\beta \Rightarrow \beta=1-\alpha$



$m_{AD}=-1 \Rightarrow \alpha^2-3\alpha+5=2\alpha-1$

$\Rightarrow \alpha^2-5\alpha+6=0 \Rightarrow \alpha=2 \text{ or } 3$

$2(1-2\alpha)^2=18 \text{ or } 50$

11.已知 $ABCDEFG$ 為單位圓上的內接正七邊形， P 為此單位圓上的任一點，求

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2+\overline{PE}^2+\overline{PF}^2+\overline{PG}^2=$__________。

14

$(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA})=2+2\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OA}$

$\Rightarrow 14+2\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\cdots\overrightarrow{OG})=14$

二、綜合題(23 分)

12. 下列試題為 111 學年度分科測驗數甲考題， 2, 5

> 假設兩數列 $\langle a_n\rangle$ 、 $\langle b_n\rangle$ ，對所有正整數 n 都滿足 $b_n+\frac{4n-1}{n}<a_n<3b_n$ 。已知 $\lim_{n\to\infty}a_n=6$ ，試選出正確的選項。
>
> (1) $b_n<6-\frac{4n-1}{n}$　　(2) $b_n>\frac{4n-1}{2n}$　　(3) 數列 $\langle b_n\rangle$ 有可能發散
>
> (4) $a_{10000}<6.1$　　(5) $a_{10000}>5.9$

試以身為中崙高中數學教師的身分，針對這一題的每一個選項，請逐一對學生進行詳細解題說明。

$2b_n=3b_n-b_n>\frac{4n-1}{n}$. $a_n>\frac{12n-3}{2n} \Rightarrow a_{10000}>6-\frac{15}{100000}=5.99985>5.9$

$\begin{cases} b_n+4-\frac{1}{n}<a_n<3b_n \\ \lim_{n\to\infty}a_n=6 \end{cases}$

取 $a_n=6+\frac{10000}{n}$

$b_n=2+\frac{10000}{n}$