臺中市立臺中第一高級中等學校 115 學年度第 1 次教師甄選　數學科　試題卷

一、填充題甲：（每格 5 分，共 20 分）

1. 設 a 、b 、c 皆為正整數，且 $a<b<c$ ，已知 $a+b+c+ab+ca=376$ ，則序對 $(a,b,c)=$____________。

$a+b+c+ab+ca=376$

$\Rightarrow (a+1)+b(a+1)+c(a+1)=377$

$\Rightarrow (a+1)(1+b+c)=377=13\times 29$

$\therefore a+1=13 \Rightarrow a=12.$

$1+b+c=29 \Rightarrow b=13,\ c=15$

$\therefore (a,b,c)=(12,13,15).$

2. 已知甲、乙、丙、丁、…共 16 人任意平分成 4 組，每組 4 人，則甲、乙同組且丙、丁不同組的機率為________。

甲乙, 丙, 丁　　甲乙丙, 丁

$$\frac{C^{12}_2C^{10}_3C^7_3C^4_4+C^{12}_1C^{11}_3C^8_4C^4_4\times\frac{1}{2!}\times 2}{C^{16}_4C^{12}_4C^8_4C^4_4\times\frac{1}{4!}}=\frac{72}{455}$$

3. 已知 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，若 $\displaystyle\sum_{n=1}^{2026}\frac{1}{2^{[\sqrt{n}]}}=a-\frac{b}{2^{42}}$ ，其中 a 為一位數正整數，b 為二位數正整數，則 $a+b=$________。

$$\sum_{n=1}^{2026}\frac{1}{2^{[\sqrt n]}}=\frac12(2^2-1^2)+\frac1{2^2}(3^2-2^2)+\frac1{2^3}(4^2-3^2)+\cdots+\frac1{2^{44}}(45^2-44^2)+\frac1{2^{45}}\times 2$$

$$A=\frac12\times3+\frac1{2^2}\times5+\frac1{2^3}\times7+\cdots+\frac1{2^{44}}\times89+\frac1{2^{44}}$$

$$-)\ \frac12A=\frac1{2^2}\times3+\frac1{2^3}\times5+\cdots+\frac1{2^{44}}\times87+\frac1{2^{45}}\times89+\frac1{2^{45}}$$

$$\frac12A=\frac12\times3+\frac1{2^2}\times2+\frac1{2^3}\times2+\cdots+\frac1{2^{44}}\times2+\frac1{2^{44}}-\frac1{2^{45}}\times90.$$

$$=2\times\frac{\frac12(1-(\frac12)^{44})}{1-\frac12}+\frac1{2^{44}}-\frac{45}{2^{44}}+\frac12=2-\frac1{2^{43}}-\frac{44}{2^{44}}+\frac12=\frac52-\frac{23}{2^{43}}$$

$\therefore A=5-\frac{23}{2^{42}}$

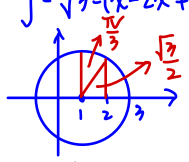
$a=5,\ b=23$

$a+b=28.$

4. 試求極限值 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sqrt{3n^2-k^2+2nk}}{n^2}$ 的值為____________。

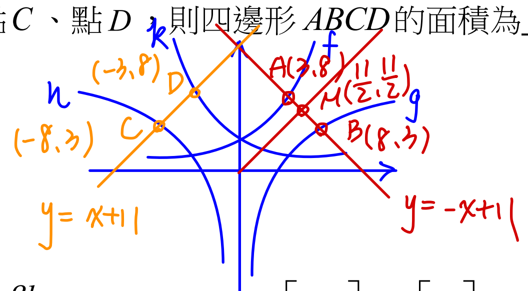
$$=\lim_{n\to\infty}\frac1n\sum_{k=n+1}^{2n}\sqrt{3-(\tfrac kn)^2+2(\tfrac kn)}=\int_1^2\sqrt{3-x^2+2x}\,dx=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt3}{2}$$

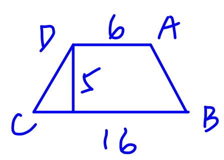
$y=\sqrt{3-(x^2-2x+1)+1}\Rightarrow y^2=4-(x-1)^2\Rightarrow (x-1)^2+y^2=4$



二、填充題乙：（每格 6 分，共 60 分）

5. 已知 $y=f(x)=2^x$ 的反函數為 $y=g(x)$ ，將 $y=g(x)$ 對 y 軸對稱後為 $y=h(x)$ ，再將 $y=h(x)$ 對 $x+y=0$ 對稱後為 $y=k(x)$ 。直線 $y=-x+11$ 分別和 $y=f(x)$ 、 $y=g(x)$ 交於點 $A(3,8)$ 、點 B ；直線 $y=x+11$ 分別和 $y=h(x)$ 、 $y=k(x)$ 交於點 C 、點 D ，則四邊形 $ABCD$ 的面積為__55__。





$\text{Area}=\frac{(6+16)\times5}{2}=55$

6. 設 $\begin{cases}a_{n+1}=\alpha a_n+\beta b_n\\ b_{n+1}=\gamma a_n+\delta b_n\end{cases}$ ，且矩陣 A 滿足 $\begin{bmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix},\forall n\in N$ 。已知矩陣 A 為不可逆的轉移矩陣，且 $\begin{bmatrix}a_5\\ b_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac23\\ \frac43\end{bmatrix}$ ，則矩陣 $A=$__$\begin{bmatrix}\frac13&\frac13\\ \frac23&\frac23\end{bmatrix}$__。

$$\begin{bmatrix}a&a\\1-a&1-a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac23\\ \frac43\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a\\2-2a\end{bmatrix}$$

$\therefore \frac23=2a\Rightarrow a=\frac13$

7. 平面上有ΔABC，其中點$A(1,5)$、點$B(7,2)$，且ΔABC的面積為 15。設P為圓$x^2+y^2+14x+12y+80=0$上一點，則當$\overline{PC}$長為最小時，C點坐標為<u>(-3,2)</u>。

1° $(x+7)^2+(y+6)^2=-80+49+36=5$

$\frac{1}{2}\times 3\sqrt{5}\times h=15 \Rightarrow h=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

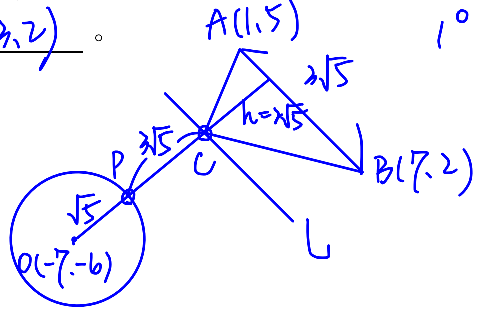
$L_{AB}: y=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2} \Rightarrow x+2y=11$

$d(O,L_{AB})=\frac{|-7-12-11|}{\sqrt{5}}=\frac{30}{\sqrt{5}}=6\sqrt{5}$

2° $\because \overrightarrow{OC} \parallel (1,2),\ |\overrightarrow{OC}|=4\sqrt{5}$

$\therefore \overrightarrow{OC}=(4,8)$

$C=(-3,2)$



8. 已知P點到直線$L_1: x+4=\frac{y-11}{7}=\frac{z-7}{2}$與直線$L_2:\begin{cases}x-z=7\\y=3\end{cases}$的投影點分別為$A(-5,a,b)$與$B(c,d,0)$，且$\overline{PA}=\overline{PB}$，則$P$點坐標為<u>(2,3,5)</u>。

a,b: 4, 5　c,d: 7, 3

$\overrightarrow{AP}\perp \overrightarrow{L_1}: (x+5)+7(y-4)+2(z-5)=0$

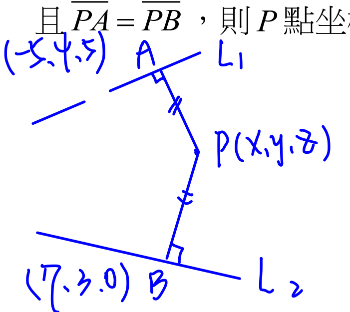
$\overrightarrow{BP}\perp \overrightarrow{L_2}: (x-7)+z=0.$

$\overline{AP}=\overline{BP}: (x+5)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=(x-7)^2+(y-3)^2+z^2$

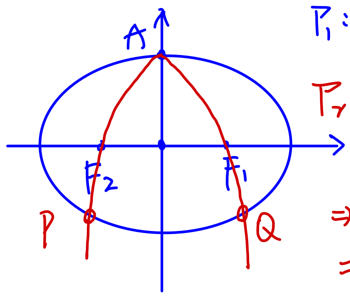
$\Rightarrow (x,y,z)=(2,3,5)$

$L_1:\begin{cases}x=-4+t\\y=11+7t\\z=7+2t\end{cases}$

$L_2:\begin{cases}x=7+s\\y=3\\z=s\end{cases}$



9. 平面上有一個中心為O點，F_1、F_2為兩焦點的橢圓Γ_1，且A點為其短軸上其中一個頂點。另有一個以O點為焦點，A點為頂點，且過點F_1、F_2的拋物線Γ_2。已知Γ_1與Γ_2有P、Q、A三個交點，則$\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}=$<u>$\frac{11}{5}$</u>。



$\Gamma_1: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ c^2=a^2-b^2$

$\Gamma_2: x^2=4(-b)(y-b)$

$F_1(\sqrt{a^2-b^2},0)$ 代入

$\Rightarrow a^2-b^2=4b^2$

$\Rightarrow a=\sqrt{5}b$

$\therefore$ 解 Q: $\frac{-4by+4b^2}{5b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\Rightarrow -4by+4b^2+5y^2=5b^2$

$\Rightarrow 5y^2-4by-b^2=0.$

$\Rightarrow (5y+b)(y-b)=0 \Rightarrow y=-\frac{b}{5}$ or b

$x^2=-4b(-\frac{b}{5}-b)=\frac{24}{5}b^2$

$x=\pm\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{5}}b,\ Q(\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{5}}b,-\frac{1}{5}b)$

所求 $=\frac{\sqrt{\frac{24}{5}b^2+\frac{1}{25}b^2}}{b}=\sqrt{\frac{24}{5}+\frac{1}{25}}=\sqrt{\frac{121}{25}}=\frac{11}{5}$

10. 在數列$\langle a_n\rangle$中，已知首項$a_1=\frac{5}{2}$，且遞迴關係式為$2a_n-a_{n-1}=4n+2$（其中$n\ge 2$），求此數列的一般項a_n為____________。

原式 $\Rightarrow a_n-(4n-2)=\frac{1}{2}[a_{n-1}-(4(n-1)-2)]$

$=\cdots=(\frac{1}{2})^{n-1}[a_1-(4\times 1-2)]$

$=(\frac{1}{2})^{n-1}\times\frac{1}{2}=(\frac{1}{2})^n$

$\therefore a_n=(\frac{1}{2})^n+4n-2,\ n\ge 1.$

11. 設$f(x)$為一實係數三次多項式。已知$f(x)$除以$(x-2)^2$的餘式為$12x-20$；且$f(x)$除以$(x-4)^2$的餘式為$12x-36$。若$y=f(x)$的對稱中心為$(h,f(h))$，則$x\cdot f(x)$除以$(x-h)(x-2)(x-4)$的餘式為<u>$4x^2-4x$</u>。

$f(x)=(x-2)^2(ax+b)+(12x-20)$

$=(x-4)^2(ax+c)+(12x-36)$

$[x^2]: -4a+b=-8a+c$

$[x]: -4b+4a+12=-8c+16a+12$

$[1]: 4b-20=16c-36$

$\therefore\begin{cases}4a+b-c=0\\12a+4b-8c=0 \Rightarrow 3a+b-2c=0\\4b-16c=-16 \Rightarrow b-4c=-4\end{cases}$

$a=4,\ c=-4,\ b=-20$

$\because f''(x)=0 \Rightarrow h=3$

$\Rightarrow f(x)=(x^2-4x+4)(4x-20)+12x-20=4x^3-36x^2+108x-100$

4	-36	+108	-100	0		2
	8	-56	104	8		
4	-28	52	4	8		3
	12	-48	12			
4	-16	4	16			4
	16	0				
4	0	4				

$f(x)=(x-2)(x-3)(x-4)(4x)+4(x-2)(x-3)+16(x-2)+8$

$\Rightarrow 4x^2-4x$

12. 用 12 根鋼條架構出一個正立方體的裝置藝術，今將其斜立在公園的平地上，如圖所示。為了穩固此裝置藝術，除了將O點落在地面上，還在A,B,C三處各架上一根垂直地面的鐵柱，分別為$\overline{AA'}$、$\overline{BB'}$與$\overline{CC'}$。若已知正立方體的邊長為 13 公尺，且點A到地面的垂直距離$\overline{AA'}$為 3 公尺，點B到地面的垂直距離$\overline{BB'}$為 4 公尺，試求該正立方體中，距離地面最遠的頂點其高度為<u>19</u>公尺。

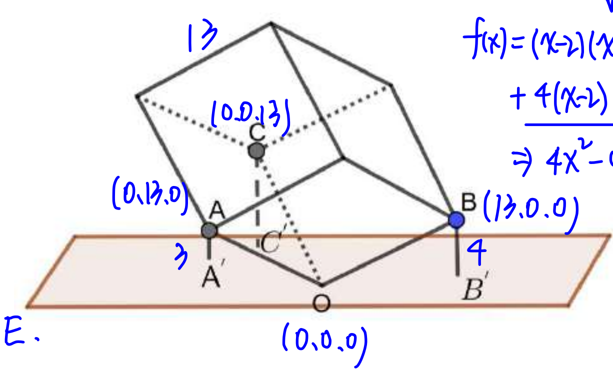
設 $E: x+ay+bz=0,\ a>0,\ b>0$　(13,13,13)

$\therefore \frac{13}{\sqrt{1+a^2+b^2}}=4,\ \frac{13a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}=3 \Rightarrow \frac{19\times 13}{\sqrt{16+9+144}}=19$

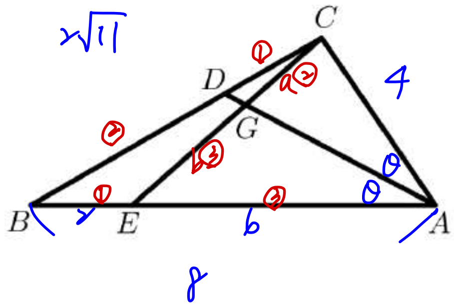
$\Rightarrow \frac{4}{13}=\frac{3}{13a} \Rightarrow a=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow \sqrt{1+\frac{9}{16}+b^2}=\frac{13}{4} \Rightarrow b^2+\frac{25}{16}=\frac{169}{16} \Rightarrow b^2=\frac{144}{16}$

$\therefore b=\frac{12}{4}=3,\ E: x+\frac{3}{4}y+3z=0 \Rightarrow 4x+3y+12z=0.$



13. 如圖，ΔABC中，$\overline{AB}=8$、$\overline{AC}=4$、$\overline{BC}=2\sqrt{11}$。已知$\overline{AD}$是$\angle BAC$的平分線交$\overline{BC}$於D點。設E點在$\overline{AB}$上且滿足$\overline{AE}=3\overline{BE}$，又$\overline{AD}$和$\overline{CE}$交於$G$點，則$\Delta ACG$的外接圓面積為 $\frac{32}{7}\pi$ 。



1° $\frac{3}{4}\times\frac{a}{b}\times\frac{2}{1}=1$

$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{2}{3}$

2° $\cos 2\theta=\frac{16+64-44}{2\times4\times8}=\frac{36}{2\times4\times8}=\frac{9}{16}=1-2\sin^2\theta$

$\Rightarrow \sin^2\theta=\frac{7}{32} \Rightarrow \sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}$

3° $\overline{EC}^2=16+64-2\times4\times8\times\frac{9}{16}=25 \Rightarrow \overline{CE}=5 \Rightarrow \overline{CG}=2$

4° $2R=\frac{2}{\frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}}=\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \Rightarrow R=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

$\therefore R^2\pi=\frac{32}{7}\pi$

14. 已知三正數x、y、z滿足$x^2+4y^2+4z^2=12$，則$\sqrt{3xy}+5z$的最大值為 $2\sqrt{21}$ 。

$$\underbrace{(x^2+4y^2+4z^2)\left(\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)}_{=84}\geq\left(\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}x+2\sqrt{6}y}{2}+5z\right)^2\geq\left(\sqrt{3xy}+5z\right)^2$$

$\therefore \sqrt{3xy}+5z\leq 2\sqrt{21}$

計十二、$\triangle ABC$ 對邊 a、b、c，有一直線 L 過 $\triangle ABC$ 之內心，且和 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 分別交 D、E，

求 $\dfrac{\triangle ADE\text{面積}}{\triangle ABC\text{面積}}$ 之最小值。（以 a、b、c 表示之）。

臺中市立臺中第一高級中等學校 115 學年度第 1 次教師甄選 數學科 標準答案

一、填充題甲：每題 5 分，共 20 分。

1	2	3	4
(12,13,15)	$\frac{72}{455}$	28	$\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、填充題乙：每題 6 分，共 60 分。

5	6	7	8
55	$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$	C(－3,2)	(2,3,5)
9	**10**	**11**	**12**
$\frac{11}{5}$	$a_n = 4n - 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$	$4x^2-4x$	19
13	**14**		
$\frac{32}{7}\pi$	$2\sqrt{21}$		