

臺中市立臺中第一高級中等學校 115 學年度第 1 次教師甄選 數學科 試題卷

一、填充題甲：(每格 5 分，共 20 分)

1. 設 a 、 b 、 c 皆為正整數，且 $a < b < c$ ，已知 $a+b+c+ab+ca=376$ ，則序對 $(a,b,c)=$ _____。

2. 已知甲、乙、丙、丁、...共 16 人任意平分成 4 組，每組 4 人，則甲、乙同組且丙、丁不同組的機率為_____。

3. 已知 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，若 $\sum_{n=1}^{2026} \frac{1}{2^{[\sqrt{n}]}} = a - \frac{b}{2^{42}}$ ，其中 a 為一位數正整數， b 為二位數正整數，則 $a+b=$ _____。

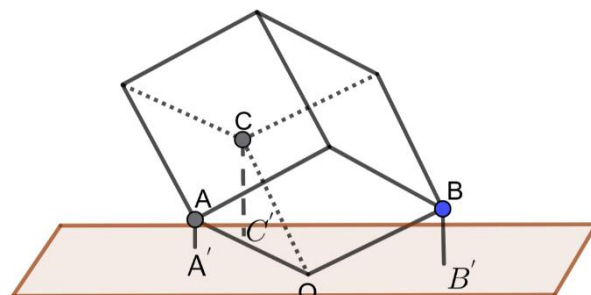
4. 試求極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sqrt{3n^2 - k^2 + 2nk}}{n^2}$ 的值為_____。

二、填充題乙：(每格 6 分，共 60 分)

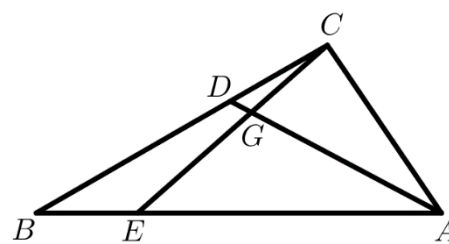
5. 已知 $y = f(x) = 2^x$ 的反函數為 $y = g(x)$ ，將 $y = g(x)$ 對 y 軸對稱後為 $y = h(x)$ ，再將 $y = h(x)$ 對 $x+y=0$ 對稱後為 $y = k(x)$ 。直線 $y = -x+11$ 分別和 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ 交於點 $A(3,8)$ 、點 B ；直線 $y = x+11$ 分別和 $y = h(x)$ 、 $y = k(x)$ 交於點 C 、點 D ，則四邊形 $ABCD$ 的面積為_____。

6. 設 $\begin{cases} a_{n+1} = \alpha a_n + \beta b_n \\ b_{n+1} = \gamma a_n + \delta b_n \end{cases}$ ，且矩陣 A 滿足 $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ ， $\forall n \in N$ 。已知矩陣 A 為不可逆的轉移矩陣，且 $\begin{bmatrix} a_5 \\ b_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ ，則矩陣 $A =$ _____。

7. 平面上有 $\triangle ABC$ ，其中點 $A(1,5)$ 、點 $B(7,2)$ ，且 $\triangle ABC$ 的面積為 15。設 P 為圓 $x^2 + y^2 + 14x + 12y + 80 = 0$ 上一點，則當 \overline{PC} 長為最小時， C 點坐標為_____。
8. 已知 P 點到直線 $L_1: x+4 = \frac{y-11}{7} = \frac{z-7}{2}$ 與直線 $L_2: \begin{cases} x-z=7 \\ y=3 \end{cases}$ 的投影點分別為 $A(-5, a, b)$ 與 $B(c, d, 0)$ ，且 $\overline{PA} = \overline{PB}$ ，則 P 點坐標為_____。
9. 平面上有一個中心為 O 點， F_1 、 F_2 為兩焦點的橢圓 Γ_1 ，且 A 點為其短軸上其中一個頂點。另有一個以 O 點為焦點， A 點為頂點，且過點 F_1 、 F_2 的拋物線 Γ_2 。已知 Γ_1 與 Γ_2 有 P 、 Q 、 A 三個交點，則 $\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} =$ _____。
10. 在數列 $\{a_n\}$ 中，已知首項 $a_1 = \frac{5}{2}$ ，且遞迴關係式為 $2a_n - a_{n-1} = 4n + 2$ (其中 $n \geq 2$)，求此數列的一般項 a_n 為_____。
11. 設 $f(x)$ 為一實係數三次多項式。已知 $f(x)$ 除以 $(x-2)^2$ 的餘式為 $12x-20$ ；且 $f(x)$ 除以 $(x-4)^2$ 的餘式為 $12x-36$ 。若 $y = f(x)$ 的對稱中心為 $(h, f(h))$ ，則 $x \cdot f(x)$ 除以 $(x-h)(x-2)(x-4)$ 的餘式為_____。
12. 用 12 根鋼條架構出一個正立方體的裝置藝術，今將其斜立在公園的平地上，如圖所示。為了穩固此裝置藝術，除了將 O 點落在地面上，還在 A, B, C 三處各架上一根垂直地面的鐵柱，分別為 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 與 $\overline{CC'}$ 。若已知正立方體的邊長為 13 公尺，且點 A 到地面的垂直距離 $\overline{AA'}$ 為 3 公尺，點 B 到地面的垂直距離 $\overline{BB'}$ 為 4 公尺，試求該正立方體中，距離地面最遠的頂點其高度為_____公尺。



13. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 8$ 、 $\overline{AC} = 4$ 、 $\overline{BC} = 2\sqrt{11}$ 。已知 \overline{AD} 是 $\angle BAC$ 的平分線交 \overline{BC} 於 D 點。
 設 E 點在 \overline{AB} 上且滿足 $\overline{AE} = 3\overline{BE}$ ，又 \overline{AD} 和 \overline{CE} 交於 G 點，則 $\triangle ACG$ 的外接圓面積為_____。



14. 已知三正數 x 、 y 、 z 滿足 $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 12$ ，則 $\sqrt{3xy} + 5z$ 的最大值為_____。