說明：$(1+x)^p \equiv (1+x^p) \pmod p \Rightarrow (1+x)^{p^i} \equiv 1+x^{p^i} \pmod p$

Lucas's theorem
p is prime
$n, r \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

國立屏東女中 114 年教師甄試數學科試題

$(1+x)^n = (1+x)^{n_0}(1+x)^{n_1 p}(1+x)^{n_2 p^2}(1+x)^{n_3 p^3}\cdots$

$n = n_k p^k + n_{k-1}p^{k-1} + \cdots + n_1 p + n_0 \Rightarrow C^n_r \equiv \prod_{i=0}^{k} C^{n_i}_{r_i} \pmod p$ $\Rightarrow (1+x)^n \equiv (1+x)^{n_0}(1+x^p)^{n_1}(1+x^{p^2})^{n_2}(1+x^{p^3})^{n_3}\cdots$

$\boxed{13}$ 先備 $r = r_k p^k + r_{k-1}p^{k-1} + \cdots + r_1 p + r_0$ 当 $n_i < r_i$，$C^{n_i}_{r_i} = 0$ $\boxed{\text{p進位表示法是唯一的}}$ $\equiv \sum_{k_0}^{n_0} C^{n_0}_{k_0} x^{k_0} \sum_{k_1}^{n_1} C^{n_1}_{k_1} x^{k_1 p} \sum_{k_2}^{n_2} C^{n_2}_{k_2} x^{k_2 p^2}\cdots$ $(\mathrm{mod}\ p)$

$\boxed{\text{coef}(x^r)\text{：左：}C^n_r\text{，右：展開 } C^{n_0}_{r_0}C^{n_1}_{r_1}C^{n_2}_{r_2}\cdots}$

11. 棒球經典賽預賽某 5 支隊伍在同一組，預賽同一組的任兩隊之間都要比賽一場分出勝負。已知這 5 支隊伍實力相當，每一場勝負機率皆為$\frac{1}{2}$。則預賽所有賽程完成之後，5 支隊伍戰績相同(都 2 勝 2 負)的機率為何？

$\frac{3}{128}$

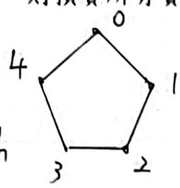
$\boxed{11}$ (Hamilton Cycles)

場次：$C^5_2 = 10$

勝 or 負 $\Rightarrow 2^{10}$

2-正則有向図 比賽

2-regular tournament graph



Step-1 cycle

win	lose
0	1, 2
1	2, 3
⋮	
4	0, 1

$\Rightarrow \frac{4!}{2} = 12$

Step-2 cycle

win	lose
0	2, 4
⋮	⋮
4	1, 3

$\Rightarrow 12$

$\frac{24}{1024} = \frac{3}{128}$

12. 實數 x、y 滿足$\begin{cases} x+y=z-1 \\ xy=z^2-7z+14 \end{cases}$，$x^2+y^2-4x-4y$ 有最大值 M、最小值 m，試求數對$(M, m)=$？

$(-7, -8)$

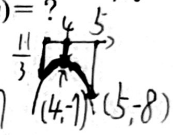
$\boxed{12}$ $f(t) = t^2 - (z-1)t + z^2 - 7z + 14$

$D \geq 0 \Rightarrow (z-1)^2 \geq 4(z^2-7z+14)$

$\Rightarrow 3z^2 - 26z + 55 \leq 0$ $\Rightarrow \frac{11}{3} \leq z \leq 5$

$(z-1)^2 - 2(z^2-7z+14) - 4(z-1)$

$= -z^2 + 8z - 23 = -(z-4)^2 - 7$



13. 某公司 A 部門有 20 人，B 部門有 80 人，現欲重新整併編排如下：從 A、B 兩部門分別選取若干人組成 C 部門，剩餘的人則組成 D 部門。在 C 部門中，至少要有兩名成員來自 A 部門，且來自 B 部門之人數恰好比來自 A 部門的人數多兩人。在此原則之下，所有可能的選取編排結果有 x 種，則 x 被 41 除的餘數為何？

36

$= C^{100}_{78} - C^{20}_0 C^{80}_{78} - C^{20}_1 C^{80}_{77}$

$\boxed{13}$ $\sum_{k=2}^{20} C^{20}_k C^{80}_{k+2} = \sum_{k=2}^{80} C^{20}_k C^{80}_{78-k} = C^{100}_{22} - C^{80}_{2} - 20C^{80}_{3}$

$100 = 41\times 2 + 18$ $\quad C^{100}_{22} \equiv C^2_0 C^{18}_{22} \equiv 0 \pmod{41}$

$22 = 41\times 0 + 22$

$80 = 41\times 1 + 39$ $\quad C^1_0 C^{39}_2 \equiv (-2)19 \equiv 3 \pmod{41}$

$2 = 41\times 0 + 2$

$3 = 41\times 0 + 3$ $\quad 20C^1_0 C^{39}_3 \equiv 13\cdot 19\cdot 37 \equiv 740 \equiv 2 \pmod{41}$

14. 屏東女中舉辦 100 週年校慶抽號碼送獎品活動，規則如下：

學務處準備編號 1、2、3、…、9 的牌卡 11 張，其中編號 8 的牌卡有 3 張，其它編號的牌卡均只有 1 張。從這 11 張牌隨機抽出四張且抽出後不放回，依抽出順序由左而右排列成一個四位數。若排成的四位數滿足下列任一個條件，就可獲得獎品：

501

（1）此四位數大於 8800

（2）此四位數含有三個數字 8

$\boxed{14}$ $888\square \to 4\cdot 8 = 32$

$988\square \to 3\cdot 7 = 21$

$98\_\_ \to C^3_1\cdot 7\cdot 6 = 126$

$9\_\_\_ \to 7\cdot 6\cdot 5 = 210$

$88\_\_ \to 8\cdot 7 = 56$

$89\_\_ \to 7\cdot 6 = 42$

$898\_ \to C^3_1\cdot 7 = 14$

和 $= 501$

例如：若抽出四張牌編號依序為 8、8、1、6，則此四位數為 8816，可獲得獎品。依上述規則，請問共有多少個抽出排成的四位數可獲得獎品？

$a_n = \frac{\square\cdot 3}{3} = \frac{1}{3}\left((-1+3)^n - C^n_0(-1)^n\right) = \frac{2^n-(-1)^n}{3}$

15. $P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，設 $P^n = a_n P + b_n I$，$\forall n \in N$，求 a_n 之一般式。

$\frac{1}{3}\left(2^n-(-1)^n\right)$

$P = -I + B$

$\boxed{15}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，$B^n = 3^{n-1}B$

$P^n = (-I+B)^n = C^n_0(-1)^n I + \boxed{C^n_1 3^0 (-1)^{n-1} + C^n_2 3^1 (-1)^{n-2} + \cdots + C^n_n 3^{n-1}(-1)^0}\,(P+I)$

16. 數列〈b_n〉滿足 $b_1=6$，$b_2=96$，$b_{n+2}=\frac{(b_{n+1})^3}{2(b_n)^2} - 2b_{n+1}(b_n)^2$，$\forall n \in N$。設 $p = \left(\frac{b_{101}}{2b_{100}}\right)^2 + (b_{100})^2$，則 $\log(\log p)$ 之值最接近哪個整數？

30

$\boxed{16}$ 令 $a_n = \left(\frac{b_{n+1}}{2b_n}\right)^2 + (b_n)^2 \Rightarrow a_{n+1} = \left(\frac{\frac{(b_{n+1})^3}{2b_n^2} - 2b_{n+1}(b_n)^2}{2b_{n+1}}\right)^2 + (b_{n+1})^2 = \left(\frac{(b_{n+1})^2}{4b_n^2} - 2(b_n)^2\right)^2 + (b_{n+1})^2 = \left(\left(\frac{b_{n+1}}{2b_n}\right)^2 + (b_n)^2\right)^2 = a_n^2$

$a_1 = \left(\frac{96}{2\cdot 6}\right)^2 + 36 = 100$，$a_2 = 10^{2^2}$，$a_n = 10^{2^n}$，$\log(\log 10^{2^{10}}) = 10\log 2 \Rightarrow 30$

二、計算證明題(共 15 分)

1. $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$ 為空間向量，其中 $\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0}$。

   證明：若 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$ 且 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}$，則 $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$。　(6 分)

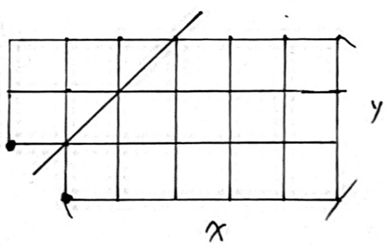
$\boxed{1}$ $\begin{cases}\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0\\ \vec{a}\times(\vec{b}-\vec{c})=\vec{0}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\vec{a}\perp(\vec{b}-\vec{c})\\ \vec{a}\parallel(\vec{b}-\vec{c})\end{cases} \Rightarrow \vec{b}-\vec{c}=\vec{0} \Rightarrow \vec{b}=\vec{c}$

2. 甲、乙兩人參選形象大使，由 n 位委員不記名投票，每人都投了一票，且無人投廢票，開票採一一唱票方式，假設開票過程中任何時刻甲的得票數皆不低於乙的得票數，直至開票完成。設所有可能的開票過程有 a_n 種情形，例如：$a_2=2$ (甲甲、甲乙，兩種可能過程)；$a_3=3$ (甲甲甲、甲甲乙、甲乙甲，三種可能過程)。

   (提示(Catalan number C_m)：若甲乙各得 m 票，且在開票過程中，任何時刻甲的累計得票數皆不低於乙，則滿足此條件的開票順序共有 $C_m=\dfrac{1}{m+1}C^{2m}_m=C^{2m}_m-C^{2m}_{m+1}$ 種。)

   (1) 求 $a_5=$？ 10 (3 分)

   (2) 請推證出 a_n 的一般表達式 $C^n_{[\frac{n}{2}]}$ (6 分)



$x+y=n$

$\Rightarrow C^n_y-C^n_{y-1}$

(1) $n=5$

x	y
5	0
4	1
3	$2=[\frac{5}{2}]$

$C^5_0=1$

$C^5_1-C^5_0=4$

$C^5_2-C^5_1=5$

$a_5=10$

(2)

$a_n=C^n_0+C^n_1+C^n_2+\cdots+C^n_{[\frac{n}{2}]-1}+C^n_{[\frac{n}{2}]}$

$-\left(C^n_0+C^n_1+C^n_2+\cdots+C^n_{[\frac{n}{2}]-1}\right)$ $=C^n_{[\frac{n}{2}]}$