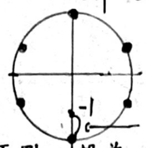
2026、開學左右～2.27(五) Ru

1. 設複數z滿足z^3為純虛數，且滿足$|z^3+4-5i|=5$，試求$|z+i|$的最小值。

$\sqrt[3]{2}-1$

$\boxed{1}$ $3\theta=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi \Rightarrow \theta=\begin{matrix}0^\circ\\120^\circ\\240^\circ\end{matrix}\pm30^\circ$

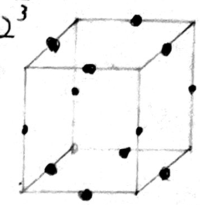


$z=bi$ $\quad (b-5)^2=9$

$\Rightarrow b=8 \text{ or } 2,\ b^{\frac13}=2^{\frac13}$

$2^{\frac13}-1 \Longleftarrow$

2. 從一正立方體的稜邊中點中，任選兩點，設為A,B，試問可形成幾種不同的$\overrightarrow{AB}$？



54 $\boxed{2}$

1 0 0 $\quad$ 1 1 0 $\quad$ $\frac12\ \frac12\ 0$ $\quad$ $\frac12\ \frac12\ 1$ $\quad$ $(\pm \rightarrow \times 2)$

$3\cdot2=6$ $\quad$ $3\cdot2^2=12$ $\quad$ $3\cdot2^2=12$ $\quad$ $3\cdot2^3=24$

3. 有編號1~12的整數牌各1張，將這12張牌隨機排成一列，並將這12張牌依序分成三區。排列在前4張稱為第一區，接下來的3張牌稱為第二區，剩下的5張牌稱為第三區。已知最大數字牌(即12號牌)出現在第三區的第一個位置，且9號牌亦在第三區，試求：第二區中的每張牌皆小於第一區中編號前兩大的牌的機率為何？(例如：$\boxed{8,10,11,3}$,$\boxed{1,2,7}$,$\boxed{12,4,5,6,9}$可；$\boxed{8,11,5,4}$,$\boxed{10,7,6}$,$\boxed{12,1,9,3,2}$不可(因為第二區的10號牌大於第一區中第二大的8號牌)。)

$\frac{2}{7}$

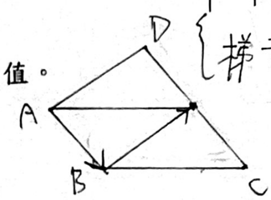
$\boxed{3}$ $\quad$ − − − − | − − −

$\frac{4\times3\times5!}{7!}=\frac{2}{7}$ $\quad$ or $\quad$ $\frac{C^4_2}{C^7_2}=\frac{2}{7}$

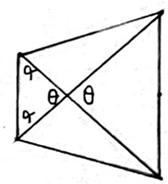
4. 坐標平面上有A,B,C,D四點，已知$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$，$\overrightarrow{AC}$與$\overrightarrow{BD}$夾角的餘弦值等於$\frac{7}{9}$，且$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，試求$\cos\angle BAC$的值。

$\frac{1}{3}$

$\boxed{4}$



{梯形 ⇒ 等腰梯形



$\cos\left(\frac{180^\circ-\theta}{2}\right)$

$=\sin\frac{\theta}{2}=\left(\frac{1-\frac{7}{9}}{2}\right)^{\frac12}=\frac{1}{3}$

5. 在坐標平面上，有甲、乙、丙三隻狗，分別站在一個三角形的三個頂點A_0,B_0,C_0，接下來，每一回合三隻狗會同時移動，並依照下列規則各自朝對方追逐：

$A:\begin{bmatrix}3/4 & 1/4 & 0\\ 0 & 4/5 & 1/5\\ 1/6 & 0 & 5/6\end{bmatrix}$

送分

甲狗朝乙狗的位置直線移動，但只移動兩者距離的$\frac{1}{4}$(例如第一回合中，甲狗移動了$\frac{1}{4}\overrightarrow{A_0B_0}$)；乙狗朝丙狗的位置直線移動，但只移動兩者距離的$\frac{1}{5}$；丙狗朝甲狗的位置直線移動，但只移動兩者距離的$\frac{1}{6}$。

設第k回合($k=0,1,2,\cdots$)後三隻狗的位置構成一個3×2的坐標矩陣X_k，其中X_k的第1、2、3列分別為甲、乙、丙三隻狗的(x,y)坐標。已知此運動滿足$X_{k+1}=MX_k$，試求矩陣M

$\boxed{5}$

$C_{k+1}=C_k+\frac16(A_k-C_k)$

$=\frac16A_k+\frac56C_k$

令#k回合的位置 分別為A_k,B_k,C_k

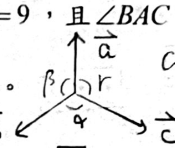
$A_{k+1}=A_k+\frac14(B_k-A_k)$ $=\frac34A_k+\frac14B_k$

$B_{k+1}=B_k+\frac15(C_k-B_k)$ $=\frac45B_k+\frac15C_k$

分子：$(\vec a\cdot\vec a)(\vec b\cdot\vec c)-(\vec a\cdot\vec c)(\vec b\cdot\vec a)$

6. 空間中有一四面體$ABCD$，已知$\overline{AB}=\sqrt{30}$, $\overline{AC}=15$, $\overline{AD}=9$，且$\angle BAC=60^\circ,\angle CAD=30^\circ$。當$\sin\angle BAD=t$時，四面體$ABCD$體積有最大值。試求$t$值。

$\frac{\sqrt{13}}{4}$

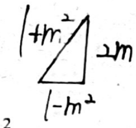


$\cos\theta=\frac{(\vec a\times\vec b)\cdot(\vec a\times\vec c)}{|\vec a\times\vec b|\,|\vec a\times\vec c|}=\frac{\cos\varphi-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$

兩面角$\theta=90^\circ \Rightarrow 0=\cos\theta=\frac{\sqrt{1-t^2}-\frac12\cdot\frac{\sqrt3}{2}}{\frac12\cdot\frac{\sqrt3}{2}} \Rightarrow 1-t^2=\frac{3}{16}$

$\boxed{6}$ $\quad \Rightarrow t=\frac{\sqrt{13}}{4}$

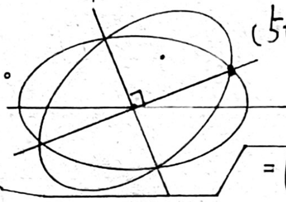
$\begin{bmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{bmatrix}$



7. 設矩陣 $M=\begin{bmatrix}\frac{21}{29} & \frac{20}{29}\\ \frac{20}{29} & -\frac{21}{29}\end{bmatrix}$，已知橢圓 Γ_1: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{2}=1$ 經 M 線性變換後得到橢圓 Γ_2，將橢圓 Γ_2 對直線 $y=kx$ 鏡射後，得到橢圓 Γ_1，試求：

鏡射

$\boxed{7}$ $\frac{2m}{1-m^2}=\frac{20}{21} \Rightarrow 10m^2+21m-10=0$ $\begin{matrix}5 & -2\\ 2 & +5\end{matrix} \Rightarrow k=\frac{2}{5}$ or $\frac{-5}{2}$



$(5t,2t)$ $t^2\left(\frac14+2\right)=1$

$\Rightarrow \frac23(5,2) \Rightarrow \left(\frac{10}{3},\frac43\right)$

(1) 橢圓 Γ_1 與橢圓 Γ_2 在第一象限的交點坐標。 $\left(\frac{10}{3},\frac43\right)$

(2) 實數 k 的值。 $\frac25$ or $\frac{-5}{2}$

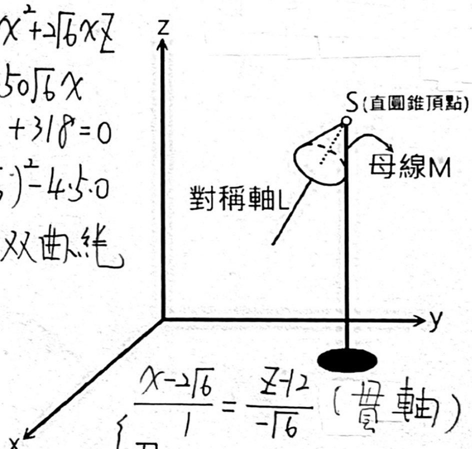
$\boxed{8}$ $\cos\theta=\frac{(1,-1,-\sqrt6)\cdot(0,0,-1)}{2\sqrt2\cdot1}=\frac{\sqrt3}{2}$. $((x-2\sqrt6,\ y-3\sqrt6,\ z-12)\cdot(1,1,-\sqrt6))^2$ & $y=0$

$=((x-2\sqrt6)^2+(y-3\sqrt6)^2+(z-12)^2)(8\cdot\frac34)$

8. 某房間內設有一盞聚光燈，其照射的光線為直圓錐狀。為描述其空間幾何關係，建立如右圖所示的空間坐標系。已知光源 $S(2\sqrt6,3\sqrt6,12)$ 分別沿著對稱軸 L 的方向向量 $\left(\frac{\sqrt2}{2},\ -\frac{\sqrt2}{2},\ -\sqrt3\right)$ 以及其中一條母線 M 的方向向量 $(0,\ 0,\ -1)$ 向地面 $z=0$ 照射，試問：此聚光燈照射在牆面（即平面 $y=0$）上的光線邊緣，為哪一種圓錐曲線圖形的一部分？該圓錐曲線在牆面上的頂點坐標為何？ $\left(-\sqrt6+\frac{18\sqrt{14}}{7},\ 0,\ 30-\frac{36\sqrt{21}}{7}\right)$

$\Rightarrow \Gamma: 5x^2+2\sqrt6xz-50\sqrt6x+12z+318=0$

$\Delta=(2\sqrt6)^2-4\cdot5\cdot0>0 \Rightarrow$ 双曲線

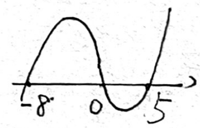


$\begin{cases}\frac{x-2\sqrt6}{1}=\frac{z-12}{-\sqrt6} & \text{(貫軸)}\\ \Gamma\end{cases}$

$S'(2\sqrt6,0,12)$, $\vec{v}'=(1,0,-\sqrt6)$ $\Rightarrow \left(-\sqrt6\pm\frac{18\sqrt{14}}{7},\ 0,\ 30\mp\frac{36\sqrt{21}}{7}\right)$

9. $f(x)$ 為一實係數三次多項式函數，已知其反曲點為 $(-1,\ 84)$，且 $\lim_{h\to0}\frac{f(-1-h)-f(-1)}{2h}=43$，又已知存在 $t>0$，使得對所有 $a,b\in R$，若 $b>a>-1$，則有 $\int_0^t f(x)dx\le\int_a^b f(x)dx$。試求 t 值。

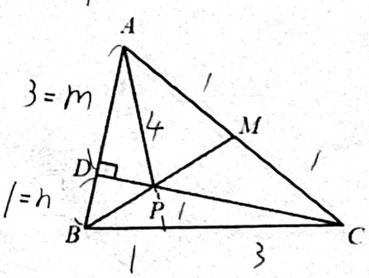
5



$\boxed{9}$ $f(x)=a(x+1)^3-86(x+1)+84$ $u^3-43u+42=0$ $\begin{matrix}u+7\\ u-6\end{matrix}$ $x+1=-7$ or 6

$f'(-1)=-86$, $f(0)=0 \Rightarrow a=2$, 令 $u=x+1$ $\begin{array}{r|r}1\ +0\ -43\ +42 & 1\\ +1\ +1\ -42 & \\ \hline 1\ +1\ -42\ \ 0 & \end{array}$ $f(x)=2x(x+8)(x-5)$

10. 如右圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AC}^2=\overline{BC}^2+\frac12\overline{AB}^2$，$\triangle ABC$ 之中線 $\overline{BM}$ 與 $\overline{AB}$ 上的高 $\overline{CD}$ 相交於點 P。若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則數對 $(x，y)=$？ $(m+n)(m-n)=\frac12(m+n)^2 \Rightarrow m=3n$



$\left(\frac35,\frac15\right)$

$\frac11\cdot\frac31\cdot\boxed{\frac13}=1$

$\boxed{10}$ $\frac31\cdot\frac43\cdot\boxed{\frac14}=1$ $\Rightarrow \frac45\left(\frac34,\frac14\right)=\left(\frac35,\frac15\right)$