

國立陽明交大附中 115 學年度 第 1 次教師甄選

數學科 試題卷

(請考生自填) 准考證號碼之末三碼：_____ 姓名：_____

一、填充題(每題 6 分，共 78 分)

1. 有一邊長為 $\sqrt{2}$ 的正八邊形 $ABCDEFGH$ ，設點 P 為 \overline{AC} 和 \overline{BG} 的交點，點 Q 為 \overline{AE} 和 \overline{BG} 的交點，則三角形 APQ 的面積為_____。

2. $\sqrt{(60+10\sqrt{35})^2 - (60-10\sqrt{35})^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 甲、乙、丙、丁、戊、己、庚 7 人選 5 人排成一列，若同時選出甲、乙，則排列時甲、乙須相鄰；若同時選出丙、丁，則排列時丙、丁須分開，則一共有_____種不同的排列。

4. 坐標空間中，設 A, B 兩點在某直線 L 上的投影點分別為 C, D ，已知 $\overline{AC} = \overline{BD} = 4$ ，

且 \overline{AC} ， \overline{BD} 兩直線的方程式分別為 $\overline{AC}: \frac{x-2}{2} = y-7 = \frac{z+3}{2}$ ， $\overline{BD}: \frac{x-5}{2} = \frac{4-y}{2} = 6-z$ ，

則 \overline{AB} 長度為_____。

5. 若方程式 $\log_2 |3x^3 - 18x + 4\sqrt{2}| = k$ 恰有五個實根，則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 已知三次函數 $f(x)=x(x-2)(x-4)$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f\left(2 + \frac{2i}{n}\right) \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
7. 在空間中，直線 $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}$ 分別與平面 $E_1: x+y+z=3$ 和 $E_2: x-y+2z=5$ 交於 A 、 B 兩點，設動點 P 在 E_1 和 E_2 的交線上，則三角形 $\triangle PAB$ 面積的最小值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
8. 在坐標平面上， O 為原點，圓 $O: x^2 + y^2 = 4$ 有一弦 \overline{AB} 在直線 $x=1$ 上，設動點 P 在弦 \overline{AB} 上，以 \overline{OP} 為弦心距的弦為 \overline{MN} ，所有可能的 \overline{MN} 所形成的區域面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
9. 設 z_1 和 z_2 為複數，且 $\omega_1 = \frac{1}{3}z_1 + \frac{2}{3}z_2$ ， $\omega_2 = \frac{3}{4}z_1 + \frac{1}{4}z_2$ ，已知 $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1 + \sqrt{3}i$ ，則 $\left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
10. 多項式 $f(x)$ 滿足 $xf(x-1) = (x-5)f(x)$ 且 $f(6) = 1$ ，則 $f\left(\frac{5}{2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
11. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{AC} = 5$ ， $\angle A = 2\theta$ ， θ 以弧度計。若 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 $R(\theta)$ ，則 $\lim_{\theta \rightarrow 0} [R(\theta) \cdot \theta] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. 學期成績以平常成績的 40% 加上段考成績的 60% 計算，已知某班同學平常成績的標準差為 20 分，段考成績的標準差為 15 分，學期成績的標準差為 13 分，則平常成績與段考成績的相關係數為_____。
13. 在某瀕危石虎的復育計畫中，研究員將石虎的活動範圍簡化為一條線性的棲地路徑，由左至右劃分為編號 0, 1, 2, 3, 4, 5 的六個區塊。已知當石虎進入編號 5 的區塊（核心保護區）後，將獲得永久安全不再移動；若進入編號 0 的區塊（開發密集區），則會因環境威脅而消失。若該石虎每日向右移動一個區塊（編號增加 1）的機率為 0.6，向左移動一個區塊（編號減少 1）的機率為 0.4，且該石虎目前位於編號 2 的區塊，則它最終成功到達編號 5 區塊（核心保護區）的機率為_____。

二、計算證明題：(22 分，須詳列出過程，否則不予計分)

1. 在空間坐標系中，設 Ω 為一底面落在 xy 平面上之直圓錐，其底面圓方程式為 $x^2 + y^2 \leq 4$ ，且頂點為 $V(0, 0, 6)$ 。設平面 $E_h: z = h$ （其中 $0 < h < 6$ ）與 Ω 相截之截痕為圓 C_h 。若 R_h 為 C_h 之內接矩形，則以 R_h 為底面、原點 $O(0, 0, 0)$ 為頂點之四角錐體積的最大值為何？(7 分)
2. 設 $f(x) = 123x^2 + 234x - 345$ ，三次多項式 $g(x)$ 的首項係數為 1，且 $y = g(x)$ 的圖形通過點 $(114, f(114))$ 、 $(115, f(115))$ 、 $(116, f(116))$ 。設 $g(x)$ 在 $x = 115$ 附近的一次近似函數為 $h(x)$ ，則 $x = 114$ 、 $x = 116$ 、 $y = g(x)$ 和 $y = h(x)$ 的圖形所圍成的區域面積為何？(8 分)
3. 若實係數三次多項式 $f(x)$ 有三個相異實根，且 $f'(x)$ 、 $f''(x)$ 分別為 $f(x)$ 的一階與二階導函數，請證明： $[f'(x)]^2 \geq f(x)f''(x)$ 對於所有實數 x 均成立。(7 分)

【試題到此結束】