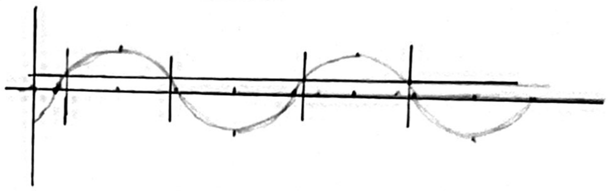
國立嘉義高級中學 114 學年度第一學期第 2 次教師甄選－數學科試題

一、填充題：共 15 題，每題 6 分，合計 90 分

2026.2.8(日) ~ 2.9(一) Ru

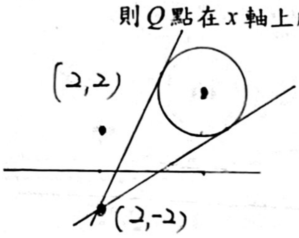
$\frac{20\pi}{3}$ 1. 已知 $0 \le x \le 4\pi$，求方程式 $4\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-4\cos x=1$ 之所有實根總和為______。

$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\frac{1}{4}$



$\frac{\pi}{6}\times 4+\pi+2\pi+3\pi=\frac{20\pi}{3}$

$\sqrt{3}$ 2. 設圓 $C:(x-6)^2+(y-4)^2=4$，今有一質點自點 $P(2,2)$ 發射，射向 x 軸上之 Q 點後反射恰可碰觸到圓 C，則 Q 點在 x 軸上所有可能的位置所構成的區間長度為______。



$L: y-4=m(x-6)\pm\sqrt{4m^2+4}$

$(4m-6)^2=4m^2+4$

$\Rightarrow 3m^2-12m+8=0 \Rightarrow m=\frac{6\pm 2\sqrt{3}}{3}$

$(6+2\sqrt{3})x-3y=18+4\sqrt{3}$

$(6-2\sqrt{3})x-3y=18-4\sqrt{3}$

$\frac{9-2\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}-\frac{9+2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{6}=\sqrt{3}$

$\left[\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right)$ 3. $x\in R$，$[x]$ 表高斯符號，若 $[x]+[4x]=6$，則 x 的範圍為______。

$x=n+b$ $\quad$ $5n+[b]+[4b]=6$ $\quad \Rightarrow \frac{5}{4}\le n+b<\frac{3}{2}$

$n\in\mathbb{Z},\ 0\le b<1$ $\quad$ $5\times 1+0+1=6$

$\Rightarrow n=1,\ 1\le 4b<2$

168 4. 方程式 $|x|+3|y|=6$ 的圖形為 Γ，則將 Γ 上任一點 (a,b) 變換成 $(a',b')=(5a+2b-1,a-b+4)$ 得圖形 Γ'，則 Γ' 的面積為______。

$A'=\left|\begin{vmatrix}5&2\\1&-1\end{vmatrix}\right|\cdot A=7\cdot 6\cdot 4=168$

100800 5. 小明有 5 隻牛、4 隻豬及 7 隻馬玩偶，則她將這 16 隻不同的玩偶配對，每對的動物種類不同，則共有______種配對方法。

AAAAA BBB

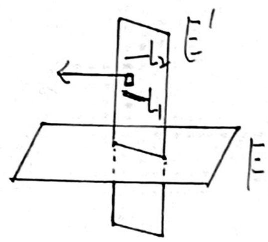
BCCCC CCC

$(C^4_1 C^7_4 C^3_3)\,5!\cdot 3!=100800$

$2x-y-z=-1$ 6. 已知平面 E 包含直線 $\begin{cases}x=1\\y+z=3\end{cases}$，且兩直線 $\frac{x-9}{2}=\frac{y+10}{1}=\frac{z-11}{-1}$ 及 $\frac{x-9}{-2}=\frac{y+10}{2}=\frac{z-11}{1}$ 在平面 E 上的投影恰為一直線，則平面 E 的方程式為______。

$\begin{matrix}2 & 1 & -1 & 2 & 1 & -1\\-2 & 2 & 1 & -2 & 2 & 1\end{matrix}$ $\quad$ $\begin{matrix}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2\\0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1\end{matrix}$ $\Rightarrow 2x-y-z=-1$

$\vec{n}_{E'}\parallel(3,0,6)\perp\vec{n}_E$ $\quad$ $2\ \ -1\ \ -1$



10000

7. 若 $a,b\in\mathbb{N}$，則有______組數對 (a,b) 滿足 $\sqrt{\log a}-\sqrt{\log b}+\log\sqrt{a}+\log\sqrt{b}\le 0$。

$(\sqrt{\log a}+1)^2+(\sqrt{\log b}-1)^2\le 2$ $\Rightarrow 0\le\sqrt{\log b}\le 2$

$1+(\qquad)^2\le 2$ $\Rightarrow 1\le b\le 10000$

$\Rightarrow -1\le(\qquad)\le 1$ $a=0$ $\Rightarrow \sim$ #

$\frac{13}{3}$

8. 若 $f(x)$ 為一實係數多項函數，已 $\int_0^1 f(x)f'(x)dx=1$ 且 $\int_0^1 (f(x))^3 f'(x)dx=2$，則 $\int_0^1 (f(x))^5 f'(x)dx$ 之值為______。

$1=\frac{1}{2}(f(x))^2\Big|_0^1$ 令 $a=(f(1))^2,\ b=(f(0))^2$

$2=\frac{1}{4}(f(x))^4\Big|_0^1$ $\begin{cases}2=a-b\\ 8=a^2-b^2=2(a+b)\end{cases}$ $\Rightarrow$ $a=3$, $b=1$

$\frac{1}{6}(f(x))^6\Big|_0^1=\frac{1}{6}(27-1)=\frac{13}{3}$

3280

9. 設 A,B 為非零二階方陣，I 表示二階的單位矩陣，O 表二階的零矩陣，滿足 $\begin{cases}A=2I+B\\ AB=O\end{cases}$，若 $(A+I)^8=kA+I$，其中 k 為實數，則 $k=$______。

$B=A-2I$ $k=C^8_1 2^0+C^8_2\cdot 2^1+\cdots+C^8_8\cdot 2^7$

$\Rightarrow O=A^2-2A$

$\Rightarrow A^2=2A$ $=\frac{(1+2)^8-1}{2}=\frac{6560}{2}=3280$

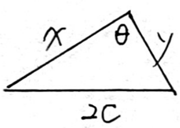
$\Rightarrow A^n=2^{n-1}A$

$-\sqrt{3}$

10. 已知橢圓 $\frac{x^2}{m}+y^2=1$（$m>1$）和雙曲線 $\frac{x^2}{n}-\frac{y^2}{3}=1$（$n>0$）有相同的兩個焦點 F_1,F_2，P 點是它們的一個交點，則 $\tan\angle F_1PF_2=$______。

$\cos\theta=\frac{2m+2n-4n-12}{2(m-n)}=\frac{-4}{2(4)}=\frac{-1}{2}$

$c^2=m-1=n+3\Rightarrow m=n+4$



$\begin{cases}x+y=2\sqrt{m}\\ x-y=2\sqrt{n}\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix}x=\sqrt{m}+\sqrt{n}\\ y=\sqrt{m}-\sqrt{n}\end{matrix}$ $\Rightarrow \tan\theta=-\sqrt{3}$

11. 若 $\max\{p,q\}$ 代表 p,q 中較大的數，$\min\{p,q\}$ 代表 p,q 中較小的數，則方程式：

2026

$2024\frac{1}{2}$

2029

$\begin{cases}\frac{1}{3}\max\{a,b\}+\frac{2}{3}\min\{a,b\}=2025\\ \frac{1}{3}\max\{b,c\}+\frac{2}{3}\min\{b,c\}=2026\\ \frac{1}{3}\max\{c,a\}+\frac{2}{3}\min\{c,a\}=2027\end{cases}$ 的解 $(a,b,c)=$______。

$a\le b\le c$ $b\le a\le c$

$\begin{cases}b+2a=2025\times 3\\ c+2b=2026\times 3\\ c+2a=2027\times 3\end{cases}$ $\begin{cases}a+2b=2025\times 3\\ c+2b=2026\times 3\\ c+2a=2027\times 3\end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases}a+2b=3\times 2025\\ a-b=3\times\frac{1}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow a-b>0$ 不合 $\Rightarrow b=2024\frac{1}{2}$, $a=2026$, $c=(2026+1)\cdot 3-2026\cdot 2$ $=2029$

12. 若 S 是 $\{1,2,3,4,\cdots,2025\}$ 的一個子集，且 S 中任兩個元素皆非相差 2，也非相差 7，則 S 個數的最大值為

900

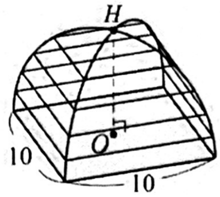
在模 9 的剩餘類 $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ 中，若選 x，則不能選 $x+2$，$x+7$

禁止差值 $2+7=9$

差值 $=2 \Rightarrow 0,2,4,6,8,1,3,5,7,0$，最多只能取 $4=\left[\frac{9}{2}\right]$ 個元素 $(x+7\equiv x-2 \pmod 9)$

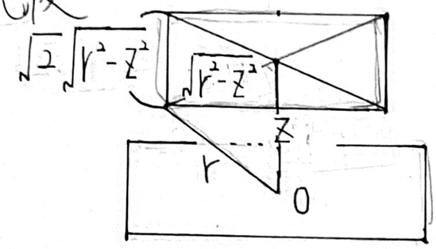
$\frac{2025}{9}\cdot 4=900$

13. 右圖是動物園新建立的大型鳥籠，其建立方式如下：在一個邊長為 10 公尺的正方形平臺上，立起兩支以底面對角線為直徑的半圓形鋼架，落腳點就在平臺的四個頂點上；而半圓形鋼架的交點 H 在底面（邊長 10 公尺的正方形）中心點 O 的正上方，即線段 OH 垂直底面；然後在鋼架上張起鐵絲網，使得每個平行底面的鐵絲網都是頂點落在鋼架上的正方形。此鳥籠的容積為______立方公尺。



$\frac{1000\sqrt{2}}{3}$

113 武陵



$\int_0^r 2(r^2-z^2)\,dz=\frac{4}{3}r^3$

114 嘉中 2 招

$r=5\sqrt{2} \Rightarrow \frac{1000\sqrt{2}}{3}$

14. 已知實數 x,y 滿足 $\frac{1}{x}+\frac{8}{y}=1$，則 $(x-1)^2+(y-8)^2$ 的最小值為______。

16

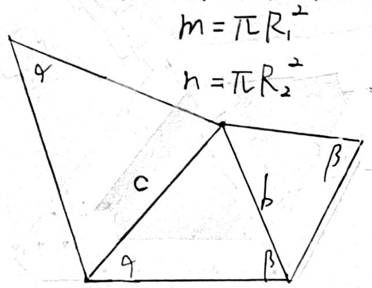
$xy-8x-y+8=8$

$\Rightarrow (x-1)(y-8)=8$

$\geq 2\left|(x-1)(y-8)\right|=16$

15. 兩圓 O_1、O_2 均通過 ΔABC 的頂點 A，且分別與 $\overline{BC}$ 邊相切於 B 點及 C 點，若圓 O_1、圓 O_2 的面積分別為 m 和 n，則以 m 和 n 表示 ΔABC 的外接圓面積為______。

$\sqrt{mn}$



$m=\pi R_1^2$

$n=\pi R_2^2$

$2R_1=\frac{c}{\sin\alpha}$

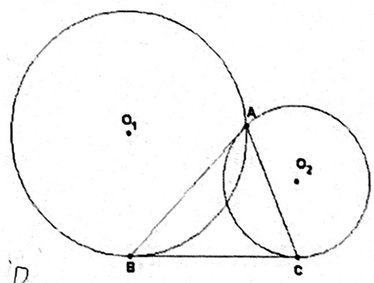
$2R_2=\frac{b}{\sin\beta}$

$2R_3=\frac{c}{\sin\beta}$

$2R_3=\frac{b}{\sin\alpha}$

$\Rightarrow R_3^2=R_1R_2$

$\Rightarrow \pi R_3^2=\sqrt{mn}$



二、計算題(10 分，需有計算過程，否則不予計分)

四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=2\sqrt{2}$，$\overline{BC}=4$，$\overline{CD}=3$，$\angle B=45^\circ$，$\angle C=90^\circ$，點 P 在 $\overline{AB}$ 上，點 Q 在 $\overline{CD}$ 上，若 $\overline{PQ}$ 平分四邊形 $ABCD$ 的面積，則 $\overline{PQ}$ 的最小值為何？

$\boxed{3\sqrt{2\sqrt{2}-2}}$

$\frac{9}{2}=\frac{1}{2}uv\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow uv=9\sqrt{2}$

$u^2+v^2-2uv\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\geq 2uv\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=18(\sqrt{2}-1) \Rightarrow \sim \#$