說明：1. 本試題共有二大題，第一大題填空題，每題 5 分，共 30 分

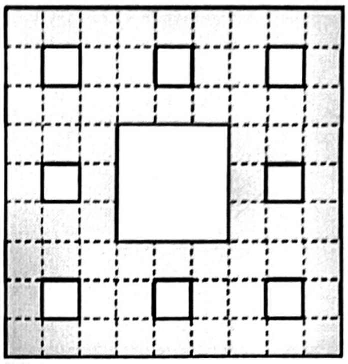
第二大題計算說明題，各題配分標於題末，共 70 分

2. 各題答案若非整數，請以有限小數、最簡分數或最簡根式作答。

2026.2.6(五) ~ 2.8(日) Ru

一、填充題：(共 6 格，每格 5 分，共 30 分)

$\boxed{1}$ 小法1: $7(8+4+8)+27\times 7=329$



1. (1) 從一個$9\times 9\times 9$正立方體開始。小歐從中移除儘可能少的$1\times 1\times 1$正立方體，使得最後的造型之前視圖、側視圖與俯視圖都與右圖所示相同。請問小歐總共移除________個$1\times 1\times 1$的正立方體。

(2) 承(1)，小歐所得到的造型之表面積為________平方單位。

(1)法2: $27\times 27-(27-7)(8+4+8)=329$

答：(1) 329；(2) 1056

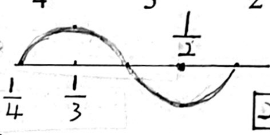
(2) $(8\times 8)6+(4\times 6)(8+4+8)+(8\times 4)\cdot 6=1056$

2. (1) 若一振幅為1的正弦波$f(x)=a\sin(bx+c)+d$通過$(\frac{1}{4},0)$、$(\frac{1}{3},1)$、$(\frac{1}{2},-1)$三點，其中$a>0$、$b>0$、$c>0$，則週期的最大可能值為

$\frac{1}{3}$

(2) 承(1)，求有$f(x)$有最大週期時，c的最小值

$\frac{\pi}{2}$



$T=\frac{1}{3}=\frac{2\pi}{b}\Rightarrow b=6\pi$

$\boxed{2}$ $\sin(6\pi\cdot\frac{1}{4}+c)=0$

$\sin(6\pi\cdot\frac{1}{3}+c)=1 \Rightarrow \min =\frac{\pi}{2}$

$\sin(6\pi\cdot\frac{1}{2}+c)=-1$

$\boxed{3}$ (1) $\begin{cases}1+x+y+0=12\\ 3\times 1+2\cdot x+1\cdot y=6\cdot 3\end{cases}\Rightarrow (x,y)=(4,7)$

連3個為一組，共12組

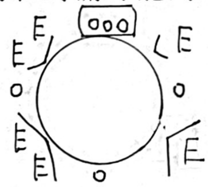
每個奇數皆算3次，總個數$=6\times 3$

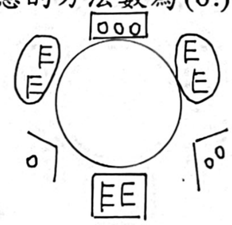
3. 把1、2、3、…、12共12個自然數隨意放置在一個圓周上，若相鄰3數中3個全為奇數的有1組，恰好2個為奇數的有x組，恰好1個為奇數的有y組，全部都不是奇數的有0組。

求：(1) 所有可能的數對(x,y)有________種

(2) 12個自然數在圓周上的相對關係能滿足題意的方法數為$(6!)^2\cdot X$，求$X=$________

答：(1) 1；(2) ~~7~~ 8 $\boxed{3}$





$C^4_2+C^2_1=8$

二、計算說明題(共 70 分)

1. 試比較$5^{-\sqrt{2}}\times 7^{-\sqrt{3}}$、$5^{-\sqrt{3}}\times 7^{-\sqrt{2}}$兩數的大小。(5分)

答：$5^{-\sqrt{2}}\times 7^{-\sqrt{3}}<5^{-\sqrt{3}}\times 7^{-\sqrt{2}}$

$\boxed{1}$ $\log(5^{-\sqrt{2}}\cdot 7^{-\sqrt{3}})-\log(5^{-\sqrt{3}}\cdot 7^{-\sqrt{2}})$

$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\log 5-\log 7)<0$

or $\frac{A}{B}=\left(\frac{5}{7}\right)^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}<1$

$\Rightarrow A<B$

2. 設$f(x)=ax^4+bi\cdot x^3+cx^2+di\cdot x+e$，其中$m$、$n$、$a$、$b$、$c$、$d$、$e$皆為實數。若$m+ni$為方程式$f(x)=0$的一根，

試說明：$m-ni$、$-m+ni$、$-m-ni$三數中，何者亦必為方程式$f(x)=0$的根？(10分)

答：$-m+ni$

$\boxed{2}$ $f(ix)=a(ix)^4-b(ix)^3-c(ix)^2+d(ix)+e$

令 $g(x)=ax^4-bx^3-cx^2+dx+e\in\mathbb{R}[x]$

$g(-n+mi)=g((m+ni)i)=f(m+ni)=0\Rightarrow g(-n-mi)=g((-m+ni)i)=0$

$\Rightarrow f(-m+ni)=0$

3. (1) 將質數由小到大排列，第50個質數為229，試估計 $\log 229$ 的值。

(估計值在 $[\log 229-10^{-k}, \log 229+10^{-k}]$ 內得 $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ 分，最多10分)

(2) 請說明你的估計結果跟實際值 $\log 229$ 相比，會是低估或是高估？為什麼？(5分)

答：(1) $\log 229 \approx 2.359835482\cdots$；

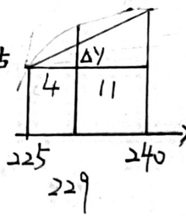
$\boxed{3}$ $\log 225 = 2\log(3\times5) \doteqdot 2(0.4771+0.602) = 2.3522$

$\log 240 = \log(2^4\times15) \doteqdot 4\times0.301+0.4771+0.699 = 2.3801$

(2) 參考答案，若(1)採用內插法

因為 $y=\log x$ 為凹口向下的圖形，割線在曲線的下方

故內差法的結果會比實際值稍低，因此上述估計值應為低估



$\frac{\Delta y}{4} = \frac{0.0279}{15}$

$2.3522+\Delta y$

$=2.35964$

4. (1) 設 a、b 為正實數，且 $a>b$，$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=3$，求 $\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}=$？(5分)

(2) 設 a、b 為正實數，且 $a>b$，$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=k$，求 $\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}=$？(以 k 表示)(10分)

答：(1) $\frac{\sqrt{5}}{2}$；(2) $\frac{k-1}{k+1}\sqrt{\frac{k+2}{k-2}}$

$\boxed{4}$ $(a+b)^2-2ab=kab$

$(a-b)^2+2ab=kab$

$\Rightarrow \frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{(a+b)^2-3ab}{(a-b)^2+3ab} = \sqrt{\frac{k+2}{k-2}}\left(\frac{k-1}{k+1}\right)$

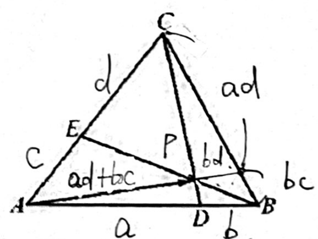
5. 如右圖，$\triangle ABC$ 中，

(1) 已知 $\overline{AD}:\overline{DB}=3:1$ 且 $\overline{AE}:\overline{EC}=2:3$，且 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CD}$ 交於 P 點，

若 $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，求 $(\alpha,\beta)=$？(5分)

(2) 已知 $\overline{AD}:\overline{DB}=a:b$ 且 $\overline{AE}:\overline{EC}=c:d$，且 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CD}$ 交於 P 點，

若 $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，求 $(\alpha,\beta)=$？(以 a、b、c、d 表示)(10分)



答：(1) $(\frac{9}{14},\frac{1}{7})$；(2) $(\frac{ad}{(a+b)(c+d)-ac},\frac{bc}{(a+b)(c+d)-ac})$

$\boxed{5}$ $\frac{d}{c}\cdot\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{bc}{ad}\right)=1$ (孟氏)

$\frac{a}{b}\cdot\frac{ad+bc}{ad}\left(\frac{bd}{ad+bc}\right)=1$ (孟氏)

$\Rightarrow \frac{ad+bc}{ad+bc+bd}\left(\frac{ad}{ad+bc},\frac{bc}{ad+bc}\right)$

$=\left(\frac{ad}{(a+b)(c+d)-ac},\frac{bc}{(a+c)(b+d)-ac}\right)$

$\left(\frac{9}{4\times5-6},\frac{2}{4\times5-6}\right)=\left(\frac{9}{14},\frac{1}{7}\right)$

$\boxed{6}$ (1) 当 $n=2$：$\sqrt{2}<\frac{3}{2}=\frac{3}{\sqrt{4}}$ 成立

設 $2^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{1}{2^2}}\cdot4^{\frac{1}{2^3}}\cdots k^{\frac{1}{2^{k-1}}}<\frac{3}{(k+2)^{\frac{1}{2^{k-1}}}}$ 成立

6. (1) 試利用數學歸納法證明：對每個大於1的整數 n，恆有

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\cdots\sqrt{n}}}}}<\frac{3}{\sqrt[2^{n-1}]{n+2}}。$$

100 華江高中

請注意：上式右端的分母是 $n+2$ 的正 2^{n-1} 次方根。(10分)

則 $n=k+1$ 時

(2) 試證：對每個大於1的整數 n，恆有 $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\cdots\sqrt{n}}}}}<3$。(5分)

答：(1) 略；(2) 略

$2^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{1}{2^2}}\cdots k^{\frac{1}{2^{k-1}}}\cdot(k+1)^{\frac{1}{2^k}}<\frac{3}{(k+2)^{\frac{1}{2^{k-1}}}}(k+1)^{\frac{1}{2^k}}$

而 $\frac{(k+1)^{\frac{1}{2^k}}}{(k+2)^{\frac{1}{2^k}}}<\frac{(k+2)^{\frac{1}{2^k}}}{(k+3)^{\frac{1}{2^k}}}\Rightarrow\frac{3(k+1)^{\frac{1}{2^k}}}{(k+2)^{\frac{1}{2^{k-1}}}}<\frac{3}{(k+3)^{\frac{1}{2^k}}}$

故由 M.I. 得証

(2) #8 屆國際城市盃 1987

$2\le m\le n$ "$\sqrt{m\sqrt{(m+1)\cdots\sqrt{n}}}<m+1$"

Backward Induction Step pf: 当 $m=n$，$\sqrt{n}<n+1$ 成立

設 $m=k$：$(2<k\le n)$ $\sqrt{k\sqrt{(k+1)\cdots\sqrt{n}}}<k+1$ 成立

則 $m=k-1$：$\sqrt{(k-1)\sqrt{k\cdots\sqrt{n}}}<\sqrt{k-1}\sqrt{k+1}<k+2$ 成立 $_2$ ~ #