9. 有三個大小相同的袋子 A、B、C，每個袋子都恰有四顆球，袋子 A 中四顆球的編號分別為 $1,2,3,4$，袋子 B 中四顆球的編號分別為 $1,3,5,7$，袋子 C 中四顆球的編號分別為 $2,4,6,8$。甲同學先任選一個袋子，然後從該袋中取出一顆球，觀察此球的編號後，將此球放回袋中；接下來換乙同學任選一個袋子，然後從袋中取出一球，觀察此球的編號後，將此球放回袋中。已知每個袋子被選取到的機會均相等，而同一袋子中每顆球被選取到的機會也均相等。若甲同學取到球的編號為 a，乙同學取到球的編號為 b，則「在 $a>b$ 的條件下，$b=5$」的機率為 $\frac{3}{62}$

$\boxed{9}$ $S=\{1,1,2,2,3,3,4,4,5,6,7,8\}$，$n(S)=12$

$n(a=b)=C^2_1C^2_1\cdot 4+C^1_1C^1_1\cdot 4=20$，$n(a>b)=\frac{1}{2}(144-20)=62$

$\Rightarrow \frac{3}{62}$ ← $\begin{matrix} a & b \\ 6 & 5 \\ 7 & \\ 8 & \end{matrix}$ 分子

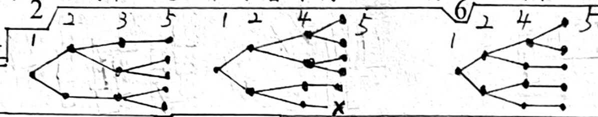
10. 有種$\boxed{\text{神奇粒子}}$，每個粒子每經過 1 小時，都會出現下列三種情況之一：

有 $\frac{1}{3}$ 的機率，這個粒子會變成 2 個；有 $\frac{1}{2}$ 的機率，這個粒子會維持 1 個；有 $\frac{1}{6}$ 的機率，這個粒子會消失；

且每個粒子每小時發生的情況均獨立

独立：$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

法1:

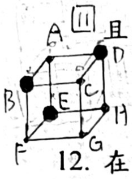


現在有 1 個這樣的$\boxed{\text{神奇粒子}}$，則「經過 3 小時後，$\boxed{\text{神奇粒子}}$的數量恰為 5 個」的機率為 $\frac{7}{243}$

$(\frac{1}{3})(C^2_1\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2})(C^3_2\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2})=\frac{1}{54}=\frac{9}{486}$，$(\frac{1}{3})(\frac{1}{3})^2)(\frac{4!}{2!}(\frac{1}{3})^2(\frac{1}{2})(\frac{1}{6})+C^4_1(\frac{1}{3})(\frac{1}{2})^3)=\frac{5}{486}$ 和了

11. 有隻螞蟻在正立方體 $ABCD-EFGH$ 上移動，「每一步」的移動規則是從一個頂點走稜邊至另一個頂點，且走到相鄰三頂點的機率均等。現在螞蟻從 A 點出發，走到最遠的 G 點即停止，則移動步數的期望值為 10

$\boxed{11}$



設 x 為 $A\to G$ 之期望步數，y 為 A鄰 $\to G$，z 為 G鄰 $\to G$

$A \rightleftarrows A$鄰 $\rightleftarrows G$鄰 $\to G$（1；$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$；$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$）

$x=1\cdot(1+y)$，$y=\frac{1}{3}(1+x)+\frac{2}{3}(1+z)$，$z=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{2}{3}(1+y)$

$\Rightarrow (x,y,z)=(10,9,7)$ $\Rightarrow 10$

12. 在坐標平面上，有一個 $\triangle ABC$，其周長為 $16\sqrt{2}$，面積為 16，已知 A,B 兩點的坐標為 $A(0,0)$, $B(4,4)$，若 C 點在第二象限，則 C 點的坐標為 $(-3\sqrt{2}-2,-3\sqrt{2}+6)$

$\boxed{12}$ $\Rightarrow t^2+8t+32=(12-\sqrt{t^2+16})^2=t^2+160-24\sqrt{t^2+16}$

$h=\frac{2\cdot 16}{4\sqrt{2}}=4\sqrt{2}\Rightarrow L_c: x-y=-8$，$C(t,t+8)$，$\sqrt{t^2+(t+8)^2}+\sqrt{(t-4)^2+(t+4)^2}=12\sqrt{2}$ $\Rightarrow (t-16)^2=9(t^2+16)$

$\Rightarrow t^2+4t-14=0 \Rightarrow (-2-3\sqrt{2},6-3\sqrt{2})$

第貳部分：計算證明題（共 28 分）

$\boxed{10}$ 法2: $f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}$　$f(f(x))=\frac{1}{3}(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6})^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6})+\frac{1}{6}$

所求 $f(f(f(x)))$ 之 coef(x^5)

$x^4: \frac{1}{27}$，$x^3: \frac{1}{3}(2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2})=\frac{1}{9}$，$x^2: \frac{1}{3}(2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{4})+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{31}{108}$，$x^1: \frac{1}{3}(2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6})+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{11}{36}$

$\frac{1}{3}(\frac{1}{27}x^4+\frac{1}{9}x^3+\frac{31}{108}x^2+\frac{11}{36}x+\dots)^2$

$\frac{1}{3}(\frac{1}{27}\cdot\frac{11}{36}+\frac{1}{9}\cdot\frac{31}{108})\cdot 2=\frac{7}{243}$

1. 已知矩陣 $X=\begin{bmatrix}2&1\\0&5\end{bmatrix}$，設 $X^n=\begin{bmatrix}a_n&b_n\\c_n&d_n\end{bmatrix}$，其中 n 為正整數，請回答下列各小題

203　$\frac{1}{3}(5^n-2^n)$

$\boxed{1}$

(1) 試求 b_4 之值。（2 分）　(2) 以 n 表示 b_n。（7 分）

$\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 0 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0$ $\Rightarrow \lambda=2$ or 5

$Ver(2)=\ker\begin{pmatrix}0&1\\0&3\end{pmatrix}=span\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\}$

$Ver(5)=\ker\begin{pmatrix}-3&1\\0&0\end{pmatrix}=span\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\}$

$P=\begin{bmatrix}1&1\\0&3\end{bmatrix}$，$P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3&-1\\0&1\end{bmatrix}$

$D=P^{-1}AP$

$A^n=PD^nP^{-1}$

$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^n&0\\0&5^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^n&\frac{1}{3}(-2^n+5^n)\\0&5^n\end{bmatrix}$

2. 已知 $f(x)$ 是定義域和對應域皆為實數的連續函數，且對於任意實數 a,b 皆滿足 $f(a+b)=\frac{1}{3}f(a)f(b)$，

若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(f(x))^2-9}{x}=2025$，請回答下列各小題。(1)

$\frac{675}{2}$

(1) 試求 $f'(0)$ 之值。（4 分）　(2) 試證明 $f(x)$ 在任意實數 c 上皆可微分。（5 分）

$\boxed{2}$ $f(b)=\frac{1}{3}f(0)f(b)$ $\Rightarrow f(0)=3$

$\Rightarrow f'(0)\cdot 6=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-3}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+3)$ $\Rightarrow f'(0)=\frac{2025}{6}=\frac{675}{2}$

(2)

$f'(c)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\frac{1}{3}f(c)\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-3}{h}=\frac{1}{3}f(c)f'(0)=\frac{225}{2}f(c)$ is defined

3. 設 b,c,d 皆為實數且 $d>0$，已知三次方程式 $x^3+bx^2+cx+d=0$ 的三根為 β、$2\beta^2$、$3\beta^3$，其中 β 為複數，

試求實數 b 之值。（10 分）

(可不用到 $f(\beta)=0$) $\boxed{3}$ 令 $\beta=re^{i\theta}$

$-d=6\beta^6<0$　$6\theta=\pi,3\pi,5\pi,7\pi,9\pi,11\pi,\dots$

3根滿足 $\theta=\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2},\frac{11\pi}{6},\dots$

2虛1実 $\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$ or $\frac{3\pi}{2}$ $\Rightarrow Re(\beta)=0$

令 $\beta=yi$，$y\in\mathbb{R}$

$b=-(yi-2y^2+3y^3(-i))\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow y^2=\frac{1}{3}$，$b=\frac{2}{3}$

【簡答】：$b=\frac{2}{3}$