

臺北市立成淵高級中學 114 學年度正式教師甄選 — 高中數學科筆試

第壹部分：填充題（每題 6 分，共 72 分）

※每格 **完全答對才給分**；答案若用分數呈現，請以最簡分數表示。

2026. 2, 3 (二) ~ 2.6 (五) Ru

1. 設 $\langle a_n \rangle$ 為一個實數數列，考慮數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項之總和 S_n ，即 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ，其中 $n \in \mathbb{N}$ 。若

□ $S_n = n^2 + 4n - 2$ ，則 $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{10}^2$ 的值为 2274。

$a_n = 2n + 3$, $Q_1 = 3 \neq 5$, $4 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 12 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 90 - 16 = 1540 + 660 + 74 = 2274$

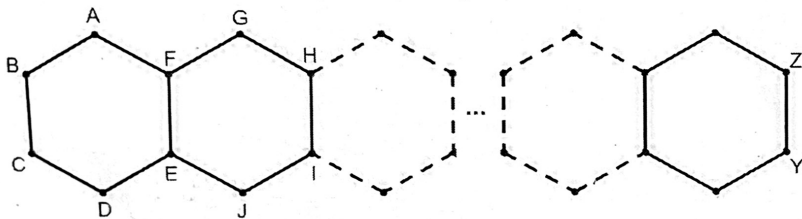
2. 設 $f(x) = (6\sin x - 8\cos x) \times (12\sin x + 5\cos x)$ ，其中 $0 \leq x < 2\pi$ ，若 $f(x)$ 的最大值为 M ，最小值为 m ，則數對 (M, m) 為 (81, -49)

$-56(\cos 2\theta) - 33 \sin 2\theta + 72 \Rightarrow 16 \pm 65 \Rightarrow M = 81$

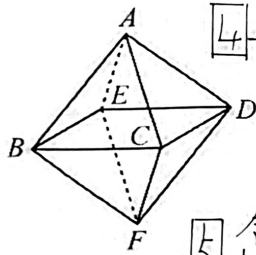
□ $72(-\cos^2) - 40\cos^2 - 33 \sin 2\theta$ $16 \pm \sqrt{56^2 + 33^2}$ $m = -49$

3. 如下圖，平面上有 26 個正六邊形緊密連接，若 $\vec{CZ} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$ ，其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ，則數對 (α, β) 為 (-77, 25)

□ $\vec{CA} + 25\vec{AG} + \vec{AF} = \vec{CA} + 25(\vec{AC} + 3\vec{BA}) + \vec{AC} + 2\vec{BA} = -77\vec{AB} + 25\vec{AC}$



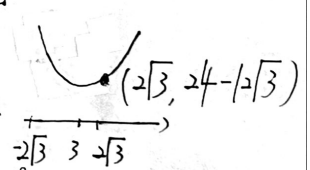
4. 如下圖，空間中有一個正八面體，若 $\vec{BD} \times \vec{CE} = (1, 2\sqrt{5}, 2\sqrt{7})$ ，則 \vec{AF} 為 $(-\frac{\sqrt{7}}{7}, -\frac{2\sqrt{35}}{7}, -2)$



□ $|\vec{AF}| = \sqrt{2} |\vec{AB}| = \sqrt{7} = \frac{7}{(\sqrt{7})} \Rightarrow \vec{AF} = \frac{1}{(\sqrt{7})} (1, 2\sqrt{5}, 2\sqrt{7})$

$|\vec{AB}|^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} |1, 2\sqrt{5}, 2\sqrt{7}| = \frac{7}{2}$

□ $t = \log_2 x$ $y = 7t^2 + \frac{1}{t^2} - 18t - 6 \cdot \frac{1}{t} + 18 = (3t + \frac{1}{t})^2 - 6(3t + \frac{1}{t}) + 12$

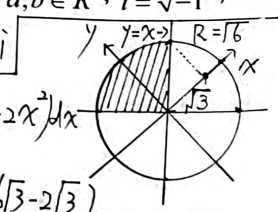


5. 已知 $x > 0, x \neq 1$ ，且 $y = (3 - \log_{\sqrt{2}} x)^2 + (3 - \log_x 2)^2$ ，則 y 的最小值为 $24 - 12\sqrt{3}$

6. 設複數 $z = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ ，若 $z^{70} + 2z^{69} + 3z^{68} + \dots + 70z + 71 = a + bi$ ，其中 $a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}$ ，則數對 (a, b) 為 $(36, 72 + 36\sqrt{3})$

□ $zS = 71z + \dots + 3z^{69} + 2z^{70} + z^{71} = 36 + 36(2 + \sqrt{3})i$

$\Rightarrow (z-1)S = -71 + (z^1 + z^2 + \dots + z^{71}) \cdot 5 + z^1 + z^2 + \dots + z^{71} = -72 \Rightarrow S = \frac{72 \cdot 2}{(2 - \sqrt{3}) - i} = \frac{144(2 - \sqrt{3} + i)}{8 - 4\sqrt{3}}$

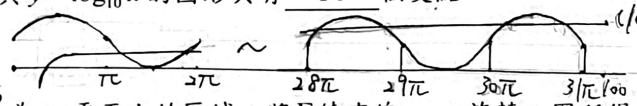


7. $y = \sin x + 1$ 的圖形與 $y = \log_{10} x$ 的圖形共有 31 個交點。

□ $\log_{10} x = 2 \Rightarrow x = 100$

$\Rightarrow 3 \int_{\pi}^{100\pi} \sin x dx = 3[-\cos x]_{\pi}^{100\pi} = 3(1 - (-1)) = 6$

$\Rightarrow 3 \int_{\pi}^{100\pi} \sin x dx = 2\pi(6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}) = 8\sqrt{3}\pi$



8. 若 $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 6 \\ x \leq 0, y \geq 0 \end{cases}$ 為 xy 平面上的區域，將 Γ 繞直線 $y = x$ 旋轉一圈所得的旋轉體體積為 $8\sqrt{3}\pi$