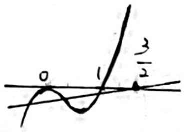
8. 已知三次函數 $f(x)=x^3-x^2-px+\frac{3}{2}p$，其中 p 是實數。若方程式 $f(x)=0$ 有三個相異實根，試求 p 的範圍。

8

$\begin{cases} y=x^2(x-1) \\ y=p(x-\frac{3}{2}) \end{cases}$



$f'(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha^3-\alpha^2-(3\alpha^2-2\alpha)\alpha+\frac{3}{2}(3\alpha^2-2\alpha)=0$

$\Rightarrow p=3x^2-2x \Rightarrow 4\alpha^3-11\alpha^2+6\alpha=0$

代入 $f(\alpha)=0$ 　 $\begin{matrix} 4 & -3 \\ 1 & -2 \end{matrix}$ $\Rightarrow \alpha=0$ or $\frac{3}{4}$ or 2 　 $\Rightarrow (0,\frac{3}{16})$

$\Rightarrow p=0$ or $\frac{3}{16}$ or 8 　 or $(8,\infty)$

【簡答】$0<p<\frac{3}{16}$ 或 $p>8$

9. 已知連乘符號的定義為 $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n$，且 $[x]$ 為不大於 x 之最大整數。若 $\prod_{k=1}^{n} 2^{[\log_{45} k]} = 1024^{1024}$，則 $n=$

k	$0\sim44$	$45\sim \quad 2024=45^2-1$	$2025=45^2\sim$
$[\log_{45}k]$	0	$1 \sim 1$	
個數	$44=45^1-45^0$	$1980=45^2-45^1$	$\square=4130$

$10240=1980+2\square$

$n=4130+2024$
$=6154$

9

【簡答】6154

10. 已知 F 為拋物線 $\Gamma: y^2=4x$ 的焦點，△ABC 的三個頂點都在 Γ 上，P 為 $\overline{AB}$ 的中點，且 $\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{FP}$，則 $\overline{FA}+\overline{FB}$ 的最大值為__________

【簡答】5

10 令 $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$, $C(x_C,y_C)$

$\overrightarrow{CF}=2(\frac{1}{2})(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB})$ $\Rightarrow F$ 為 △ABC 之重心

$\begin{cases} \overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}=x_A+x_B+x_C+3=6 \\ \overline{FC}=x_C+1\geq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \overline{FA}+\overline{FB}=6-\overline{FC}\leq 5$ 此時 $x_C=0$

二、計算證明題(每題 10 分，共 30 分) (population regression; P.R.L.)

11 $Y=\beta_0+\beta_1 x+\varepsilon$, $\mu(x)=\underbrace{\beta_0+\beta_1}_{未知} x=E(Y|x)$ 母体迴歸線，迴歸模型

11. 給定兩變量數據 $X=\langle x_i\rangle_{i=1}^{n}$、$Y=\langle y_i\rangle_{i=1}^{n}$。在其散布圖中，給定此迴歸直線 $y=a+bx$，$\forall a,b\in\mathbb{R}$，並利用「最小平方法」求此迴歸直線。 $\hat{Y}=b_0+b_1 x$ (sample regression line; S.R.L.)

($\mu(x)$ 的估計线) 樣本迴歸线，迴歸方程

(1) 設數據 X 的平均為 μ_x，數據 Y 的平均為 μ_y。試證此迴歸直線 $y=a+bx$ 必通過 (μ_x,μ_y)。

(2) 設數據 X 的標準差為 σ_x，數據 Y 的標準差為 σ_y，兩數據之間的相關係數為 r。試證 $b=r\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$。

Method of Least squared. $Y_i=\beta_0+\beta_1 x_i+\varepsilon_i=b_0+b_1 x_i+e_i$

Define

答:略

$Q(b_0,b_1)=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-b_0-b_1x_i)^2=\sum_{i=1}^{n}e_i^2$

$\frac{\partial}{\partial b_0}Q(b_0,b_1)=0$

$\frac{\partial}{\partial b_1}Q(b_0,b_1)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} nb_0+\Sigma x_i b_1=\Sigma Y_i \text{ —①} \\ \Sigma x_i b_0+\Sigma x_i^2 b_1=\Sigma x_iY_i \text{ —②} \end{cases}$ (Normal Equation)

① $\Rightarrow b_0+b_1\bar{x}=\bar{Y}$

$b_1=\dfrac{\begin{vmatrix} n & \Sigma Y_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_iY_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \end{vmatrix}}$

$=\dfrac{n(\Sigma x_iY_i-n\bar{x}\bar{Y})}{n(\Sigma x_i^2-n\bar{x}^2)}$

$=r\cdot\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_x}=\dfrac{S_{xY}}{S_{xx}}$

$\frac{39}{46}$

12. 已知 $P(1,1)$ 為橢圓 $\Gamma:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 內一點，過 P 作橢圓的弦 $\overline{A_1A_4}$、$\overline{A_2A_5}$、$\overline{A_3A_6}$，任兩相鄰的弦的夾角之一為 $\frac{\pi}{3}$，試求 $\frac{1}{\overline{PA_1}\times\overline{PA_4}}+\frac{1}{\overline{PA_2}\times\overline{PA_5}}+\frac{1}{\overline{PA_3}\times\overline{PA_6}}$ 的值

$\Gamma: \frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1$

12 r_1 $(x_0+r_1\cos\theta, y_0+r_1\sin\theta)$

r_2 $P(x_0,y_0)$ θ

$(x_0+(-r_2)\cos\theta, y_0+(-r_2)\sin\theta)$

$B(x_0+r\cos\theta)^2+A(y_0+r\sin\theta)^2=AB$

$\Rightarrow (B\cos^2\theta+A\sin^2\theta)r^2+(\ )r+Bx_0+Ay_0-AB=0$

$\frac{1}{r_1r_2}=\left|\frac{1}{r_1(-r_2)}\right|=\dfrac{B\cos^2\theta+A\sin^2\theta}{AB-Bx_0-Ay_0}$

$\cos^2\theta+\cos^2(\theta+\frac{\pi}{3})+\cos^2(\theta-\frac{\pi}{3})$

$=\frac{1}{2}\left(3+\cos2\theta+\cos(2\theta+\frac{2\pi}{3})+\cos(2\theta-\frac{2\pi}{3})\right)$

$=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{23}\cdot\frac{3}{2}(4+9)=\frac{39}{46}$

13 google

13. 在 30 天的賽程中，有一個棒球隊每天至少要比一場球，但 30 天的總比賽場數不超過 45 場。試證：存在一個時期(連續多日)，該球隊在這個時期內比賽的總場數為 14 場。

令 a_i = 前 i 天的比賽場數

$b_i=a_i+14$, $i=1,2,\cdots,30$

$1\leq a_1<a_2<\cdots<a_{30}\leq 45$,

$15<b_1<b_2<\cdots<b_{30}\leq 59$, 有 60 個數介於 1~60，根據鴿籠原理

$\exists\, i,j\in\{1,2,\cdots,30\}_2 \ni b_i=a_i+14=a_j$

$\Rightarrow a_j-a_i=14$ (#i+1天~#j天)

Created with Scanner Pro