國立基隆女中 114 學年第 1 次教師甄試 筆試試題 數學科

$x=\sqrt{2}\sin\theta$ 2026.1.18(日)~1.26(一) Ru

$dx=\sqrt{2}\cos\theta\, d\theta$

一、填充題(每題 7 分，共 70 分)

1. 試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}\left[\sqrt{4n^2-(2\times1^2)}+\sqrt{4n^2-(2\times2^2)}+\cdots+\sqrt{4n^2-(2\times n^2)}\right]=$________

【簡答】$\frac{5\sqrt{2}(\pi+2)}{4}$

$\boxed{1}$ $5\int_0^1\sqrt{4-2x^2}\,dx=10\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta=5\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos2\theta)\,d\theta=5\sqrt{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$ $=5\sqrt{2}\left(\frac{\pi+2}{4}\right)$

2. 若x為實數，試求$f(x)=\frac{2x^2+4x-3}{x^2+1}$的最大值為________

【簡答】$\frac{-1+\sqrt{41}}{2}$

$\boxed{2}$ 令原式$=k$ $(k-2)x^2-4x+(k+3)=0$ $D\geq0 \Rightarrow 4\geq(k+3)(k-2)$ $\Rightarrow k^2+k-10\leq0$ $\Rightarrow M=\frac{-1+\sqrt{41}}{2}$

3. 已知m,n為正整數且滿足$\sqrt{m}+\sqrt{n}=\sqrt{2783}$，試求數對$(m,n)$的組數

【簡答】10

$\boxed{3}$ $11\,|\,2783$, $11\,|\,253$, 23 $11\sqrt{23}=x\sqrt{23}+y\sqrt{23}$ $H^2_9=10$

$\boxed{4}$ $V^2=\begin{vmatrix}\overrightarrow{OA}\\ \overrightarrow{OB}\\ \overrightarrow{OC}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\overrightarrow{OA} & \overrightarrow{OB} & \overrightarrow{OC}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}13 & 1 & 1\\ 1 & 25 & -11\\ 1 & -11 & 25\end{vmatrix}=6480=36^2\cdot5$

$\Rightarrow \frac{V}{6}=6\sqrt{5}$.

4. 空間中有一個四面體$OABC$，邊$\overline{OA},\overline{OB},\overline{OC}$的長度分別為$\sqrt{13},5,5$，且$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=1$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-11$，試求四面體$OABC$的體積。

【簡答】$6\sqrt{5}$

$\boxed{5}$

Step		n
0	1 2 3	3
1	1 2 3 4	$4=3+\left[\frac{3-1}{2}\right]$
2	1 2 3 4 5	$5=4+\left[\frac{4-1}{2}\right]$
3	1 2 3 4 5 6 7	$7=5+\left[\frac{5-1}{2}\right]$

$n+\left[\frac{n-1}{2}\right]$

5. 設有 525 人站成一排，從第一名開始 1 至 3 報數(1,2,3,1,2,3,…)，凡報到 3 的人就退出隊伍，其餘向前靠站成新的一排，再按此規則繼續進行，直到報數後只剩下三個人為止，則最後的第三個人，最初的位置是 525 人中的第______號位置

【簡答】475

4 ~ 14	10, 14, 20, 29, 43, 64, 95, 142, 212, 317, 475

6. 近期在短影音流行的一句歌詞：「大江大海江大海」，這句歌詞共七個字。請問同字不相鄰的排列方法有幾種？

【簡答】38

$\boxed{6}$ AAABBCC n(AAA不相鄰) − n(AAA不相鄰 ∩ ((BB相鄰) ∪ (CC相鄰)))

ˇBˇBˇCˇCˇ ˇ(BB)ˇCˇCˇ ˇ(BB)ˇ(CC)ˇ

$\Rightarrow \frac{4!}{2!2!}C^5_3-\frac{3!}{2!}C^4_3\cdot2+2\cdot1=38$

7. 在複數平面上，複數z是單位圓上的任一點，且當$z=z_0$時，函數$f(z)=\left|z^2-2z+5\right|$有最小值$m$，試求數對$(z_0,m)$。

$\boxed{7}$ $f(z)=\left|z+\frac{5}{z}-2\right|=\left|(6\cos\theta-2)+i(-4\sin\theta)\right|$

$\Rightarrow 20c^2-24c+20$

$=4(5c^2-6c+5)$

當 $\cos\theta=\frac{3}{5}$, $z=\frac{3}{5}\pm\frac{4}{5}i$

$\min=\sqrt{\frac{-(36-100)}{4\cdot5}\cdot4}=\frac{8}{\sqrt{5}}$

【簡答】$\left(\frac{3}{5}\pm\frac{4}{5}i,\frac{8\sqrt{5}}{5}\right)$