# 國立蘭陽女中 114 學年度第二次教師甄試　數學科　試題

一、填充題：(每格 5 分，共 70 分)　2026.1.14(三) ~ 2026.1.17(六) Ru

請在答案卷第一頁作答，並依序標明題號，不須計算過程，僅須寫出最後的答案

$\begin{cases} P_1 = \frac{1}{3} \\ P_{n+1} = -\frac{1}{3}P_n + \frac{2}{3} \end{cases}$ $n \geq 1$

1. 投擲一個六面刻有 1，1，1，2，2，3 的公正骰子 $n$ 次，設 $P_n$ 表示此 $n$ 次之點數和為偶數的機率，請寫出數列 $< P_n >$ 的遞迴關係式。

$\boxed{1}$ $P(偶) = \frac{1}{3}$ . $P_n = \frac{1}{3}P_{n-1} + \frac{2}{3}(1 - P_{n-1}) = -\frac{1}{3}P_{n-1} + \frac{2}{3}$

35280

2. 有大小形狀相同的紅球 1 個，黃球 2 個，白球 2 個，黑球 3 個，全部排成甲、乙、丙三列，每列至少一球，問：共有多少種不同的排法？

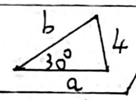
$\boxed{2}$ $H^3_5 \cdot \frac{8!}{2!2!3!} = 7 \cdot 3 \cdot 56 \cdot 30 = 35280$

$8+4\sqrt{3}$

3. 在坐標平面上第一象限有一點 $A$ 在直線 $x - \sqrt{3}y = 0$ 上，另一點 $B$ 在 $x$ 軸的正向上。已知 $\overline{AB} = 4$，$O$ 為原點，試求 $\Delta OAB$ 面積的最大值。

$\triangle = \frac{ab}{4} \leq 4(2+\sqrt{3})$

$\boxed{3}$




$16 = a^2 + b^2 - \sqrt{3}ab \geq (2-\sqrt{3})ab$

$\begin{array}{r} 01 \\ -25 \\ \hline 76 \end{array}$

7

4. 求 $x = 3^{200} - 2025$ 的十位數字。

$(3,10) = 1 \wedge \phi(10) = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 4$ . $3^{200} \equiv (3^{4})^{50} \equiv 1 \pmod{10}$

$\boxed{4}$ Euler-Fermat Theorem: $a, n \in \mathbb{N}$

$(a,n) = 1 \Rightarrow a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

$\frac{1-(-8)^{n+1}}{9}$

$3k+1$ : $k = 0, 1, \sim n$

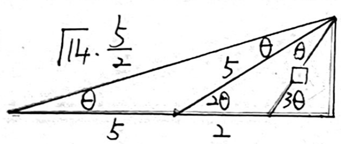
5. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$，$n \in N$，$c \in R$，$A + A^4 + A^7 + \cdots + A^{3n+1} = cA$，求 $c$ 之值。

$\boxed{5}$ $2e^{i(\frac{\pi}{3})}$, $2^4 e^{i(\pi + \frac{\pi}{3})} = -2^4 e^{i(\frac{\pi}{3})}$, $2^7 e^{i(\frac{7}{3}\pi)} = 2^7 e^{i(\frac{\pi}{3})}$ $r = -2^3 \Rightarrow \frac{1-(-8)^{n+1}}{1-(-8)}$

$\frac{75\sqrt{7}}{2}$

6. 某人由平面上一點 $A$ 測得正東方一塔(塔頂 T)的仰角為 $\theta$，由 $A$ 向塔底 D 前進 150 公尺至 $B$ 點再測得塔頂 T 的仰角為 $2\theta$，再前進 60 公尺至 $C$ 點測得塔頂 T 的仰角為 $3\theta$，其中 A、B、C 都在塔的同一側，求塔高 $\overline{TD}$ 之值。

$\boxed{6}$




$\frac{5}{2} = \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} = 3 - 4\sin^2\theta \Rightarrow \sin^2\theta = \frac{1}{8}$

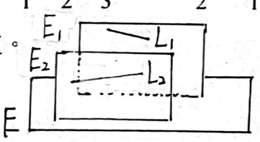
$\frac{7}{\sin 2\theta} = \frac{\square}{\sin\theta} \Rightarrow \square = \frac{7}{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}} = \sqrt{14} \Rightarrow \sqrt{14} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 30 = \frac{75\sqrt{7}}{2}$

$2\sqrt{2}$, 1, $\sqrt{7}$

$-4$

7. 空間中兩直線 $L_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ 與 $L_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ 在平面 $E : x - y + az = 3$ 上的正射影為兩條平行直線，試求實數 $a$ 的值。

$\boxed{7}$ $E_1 // E_2 \Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vec{v_2} \\ \vec{n} \end{vmatrix} = 0$




$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ & -5 & 7 & -3 & & \end{array}$

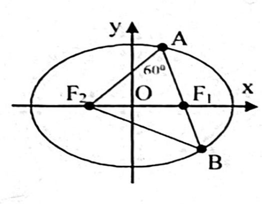
$-5 - 7 - 3a = 0$

$\Rightarrow a = -4$

$6\sqrt{3}$

8. 已知 $F_1$、$F_2$ 為橢圓 $\Gamma : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{18} = 1$ 上的兩焦點, A、B 兩點都在橢圓上,

且 $\overline{AB}$ 通過 $F_1$，若 $\angle F_1AF_2$ 夾角為 60°，試求 $\Delta F_1AF_2$ 的面積。




$\boxed{8}$ $10 = x + y$

$\Rightarrow 28 = x^2 + y^2 - xy = 100 - 3xy$

$\Rightarrow \frac{xy}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

7

9. 設 $w = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$，在複數平面上 $A_i(w^i), (i = 0,1,2,3,4,5,6)$，表七個點，試求 $\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_2} \cdot \overline{A_0A_3} \cdot \overline{A_0A_4} \cdot \overline{A_0A_5} \cdot \overline{A_0A_6}$ 之值。

$\boxed{9}$ $x^7 - 1 = (x-1)\underline{(x-w)\cdots(x-w^6)}$ 取絕對值 代 $x=1$

$= (x-1)\underline{(1 + x + x^2 + \cdots + x^6)}$ $\Rightarrow 7$

$\left(\frac{2+\sqrt{6}}{2},\frac{2-\sqrt{6}}{2}\right)$ 10. $x, y\in \mathbf{R}$, $(x+1)^2+(y-1)^2\le 1$，若 $\frac{x-y+3}{x+y+2}$ 之最大值為 $M$，最小值為 $m$，求數對 $(M,m)$。

$\boxed{10}$ 法1: 令 $x=-1+C$, $y=1+S$ $\quad k=\frac{C-S+1}{C+S+2}$ $\Rightarrow (k-1)C+(k+1)S=1-2k$ $\Rightarrow (2k-1)^2\le (k-1)^2+(k+1)^2$ $\Rightarrow 2k^2-4k-1\le 0$ $\Rightarrow \frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$

法2: $L: (k-1)x+(k+1)y+2k-3=0$, $M(-1,1)$, $d(M,L)\le 1 \Rightarrow \cdots$

$y=\frac{3}{5}x+\frac{16}{5}$ 11. 某連鎖加盟店統計每日營業時間 $X$（小時）與當月營業利潤 $Y$（十萬元）對照表如下：

| 每日營業時間 $X$（小時） | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| 當月營業利潤 $Y$（十萬元） | 6 | 6 | 8 | 10 | 10 |

求 $Y$ 對 $X$ 的迴歸直線方程式。 $y-8=\frac{3}{5}(x-8)$ $\Rightarrow y=\frac{3}{5}x+\frac{16}{5}$ $\quad \mu_x=\mu_y=8$

$\boxed{11}$

| $x_i$ | $y_i$ | $x_i-8$ | $y_i-8$ | $(x_i-8)(y_i-8)$ | $(x_i-8)^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 6 | -4 | -2 | 8 | 16 |
| 6 | 6 | -2 | -2 | 4 | 4 |
| 8 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 10 | 2 | 2 | 4 | 4 |
| 12 | 10 | 4 | 2 | 8 | 16 |
| | | | | 24 | 40 |

$6\pi$ 12. 球面 $S: x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z-19=0$，平面 $E: x-2y+2z-5=0$，$E\cap S$ 為一圓 $C$，求圓 $C$ 投影在 $xy$ 平面上的曲線所圍成之面積。 $d(M,E)=4$

$\boxed{12}$ $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=25$, $M(-1,1,-2)$ $\quad \cos\theta=\frac{(1,-2,2)\cdot(0,0,1)}{3\cdot 1}=\frac{2}{3}$ $\quad \pi\cdot 9\cdot\frac{2}{3}=6\pi$

$3x+y-1=0$ 13. 求直線 $L: 2x-y+1=0$ 以 $(0,1)$ 為中心，逆時針方向旋轉 $45^\circ$ 後之直線方程式。

$\boxed{13}$ 考慮 $(0,0)$ $\quad 2x-y=0$ $\quad L$ $\quad (0,1)$

法: $45^\circ$, $(0,1)$, $\alpha$, $2$, $1$ $\quad \tan(\theta+45^\circ)=\frac{2+1}{1-2\cdot 1}=-3$ $\Rightarrow 3x+y=1$

法2: $(x,y)\underset{-45^\circ}{\overset{45^\circ}{\rightleftarrows}}(x',y')$ $\quad x+iy=(x'+iy')\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x'+y')$ 代入 $L$ $\Rightarrow 3x+y=0$ (平移) $\Rightarrow 3x+y=1$

$0<x<\frac{1}{125}$ or $\frac{1}{3}<x<16$ 14. 解不等式：$(\log_{\frac{1}{3}}x-1)(\log_{\frac{1}{4}}x+2)(\log_{\frac{1}{5}}x-3)>0$。

$\boxed{14}$ $(\log x-\log\frac{1}{3})(\log x+\log\frac{1}{16})(\log x-\log\frac{1}{125})<0$

$-\quad+\quad-\quad+$ $\quad \log\frac{1}{125}\quad \log\frac{1}{3}\quad \log 16$ $\Rightarrow (0,\frac{1}{125})$ or $(\frac{1}{3},16)$

二、計算題：共 45 分，請在答案卷第二頁開始作答，並標明題號。

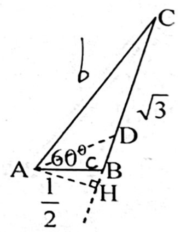
1. 如圖, $\Delta ABC$ 中, $\overline{BC}=\sqrt{3}$, $\angle BAC=60^0$, $\overline{BC}$ 邊上的高 $\overline{AH}$ 為 $\frac{1}{2}$, $\angle A$ 的角平分線交 $\overline{BC}$ 邊於 D 點, 求下列各小題:

$\boxed{1}$ (1) $\frac{1}{2}bc\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\Rightarrow bc=1$

$1$ (1) $\overline{AB}\times\overline{AC}$ (5 分) $\quad$ (2) $3=(b+c)^2-2bc-2bc\frac{1}{2}$

$\sqrt{6}$ (2) $\overline{AB}+\overline{AC}$ (5 分) $\quad \Rightarrow b+c=\sqrt{6}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ (3) $\angle A$ 的角平分線段 $\overline{AD}$ 的長 (5 分) $\quad$ (3) $\overline{AD}=\sqrt{bc-bc\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$




3. $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n\in\mathbf{R}$，證明： $\quad$ 114 蘭女二招

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

等號成立 $\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbf{R}$, $s.t.$ $b_i=\lambda a_i$, $i=1,2,\cdots,n$ (15 分)

$\boxed{3}$ 令 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}(a_ix-b_i)^2=(\sum a_i^2)x^2-(2\sum a_i\sum b_i)x+\sum b_i^2\ge 0\Rightarrow D\le 0$

當 $D=0$ $\quad (\lambda,0)$, $x$ $\quad \exists\lambda\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow f(\lambda)=0\Rightarrow b_i=\lambda a_i$, $i=1,2,\cdots n$