

一、 填充題（每題 5 分 共 20 題 100 分）全對才給分，答錯不倒扣

1. 擲某銅板出現正面的機率為 p ， $0 < p < 1$ 。連續擲此銅板 4 次，若第 k 次出現正面則得 $\frac{1}{2^k}$ ，否則得 0， $k = 1, 2, 3, 4$ 。若總所得超過 $\frac{1}{3}$ 的機率為 $ap + bp^2 + cp^3$ 求 $a + b + c =$ _____。
2. 設 a, b, c, d, e, f 為實數，且 $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ ， $d^2 + e^2 + f^2 = 14$ ，則 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ 的最大值為_____。
3. 設 α, β, γ 為方程式 $2x^3 + x^2 - x - 7 = 0$ 的三根，則 $\frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{\beta-1} + \frac{1}{\gamma-1} =$ _____。
4. 設 $f(x) = x^2 - 2mx + 2m + 3$ ， m 為實數，若 $0 \leq x \leq 4$ ，則 $f(x) > 0$ 恆成立，求 m 之範圍為_____。
5. 已知拋物線 $y = x^2 + ax + b$ 與 x 軸之交點的 x 坐標一個為 1，一個比 1 大，若拋物線與兩軸所圍區域之面積，恰等於拋物線與 x 軸所圍區域之面積，則數對 $(a, b) =$ _____。
6. 設 x 為實數，則 $f(x) = \frac{\cos x + \sin x + 2}{\cos x - \sin x + 2}$ 之最大值為_____。
7. 設 $(x+1) \cdot (x+2) \cdots (x+n) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ ，其中 $n \in \mathbb{N}$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5a_{n-2}}{n^2 \cdot a_{n-1}} =$ _____。
8. 設 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，令 $a_n = [\log n]$ ， $n \in \mathbb{N}$ ，試求 $\sum_{n=50}^{1500} a_n =$ _____。
9. 設 $f(x)$ 表一實係數多項式，若 $f(x) = 5x^4 - 3x^2 \left[\int_0^1 f(x) dx \right] + 6x - 5$ ，求 $f'(x) =$ _____。
10. 設 $A(-6, 6, 1)$ ， B 為圓 $C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 10z + 17 = 0 \\ 2x - y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ 上任一點，使 \overline{AB} 有最大值的 B 點座標為_____。
11. 兩組變量： $X: 9, 8, 7, 5, 4, 4, 2, 1$ 及 $Y: 17, 14, 12, 11, 9, 7, 6, 4$ ，求 Y 對 X 的迴歸直線方程式_____。

12. 設 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$, 求 $A^n =$ _____。

13. $a > b > 0$, 橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的切線 L 交座標軸於 A 、 B 兩點, 求線段 \overline{AB} 的最小值_____。

14. 若 $(2 + \sqrt{3})^n = x_n + y_n \sqrt{3}$, 其中 x_n, y_n 為整數時, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} =$ _____。

15. 設 x, y, z 為相異正數, 且 $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$, 試求 $\log x + \log y + \log z =$ _____。

16. 設 n 為正整數, 求 $(C_1^n)^2 + 2(C_2^n)^2 + 3(C_3^n)^2 + \cdots + n(C_n^n)^2 =$ _____。

17. 設甲乙二人隨機各寫一個二位數, 求甲所寫的數字大於乙所寫的機率為_____。

18. 設 F, F' 是橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 之焦點, p 為橢圓 Γ 上任一點, 過 p 之切線 L , 自 F 作 L 之垂線得垂足 H , 求 H 的軌跡方程式為_____。

19. 將一實心地球儀浸入水中, 令其北極朝上, 而北緯 30 度緯線恰與水面齊, 則浮出水面的部分之體積, 佔全球體積的幾分之幾?_____。

20. 一放射性元素在 10 年內衰變了 80%, 則此放射性元素之半衰期為_____。