桃園市立中壢家事商業高級中等學校　114 學年度教師甄選

【數學科】初試題目卷

2026. 1. 11(日) ~ 1.13(二) Ru

一、填充題(每題 6 分，共 60 分)

10626

1. 設數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1=1$，且對每個正整數 $k\ge 2$，滿足 $5(a_1+a_2+\cdots+a_k)=(k+4)a_k$，則 $a_{21}=$

$\boxed{1}$ $5S_k=(k+4)(S_k-S_{k-1})$ $\Rightarrow (k-1)S_k=(k+4)S_{k-1}$

$1S_2=6S_1$, $2S_3=7S_2$, $\vdots$, $\times)\ (n-1)S_n=(n+4)S_{n-1}$

$5!\,S_n=n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ $\Rightarrow a_{21}=S_{21}-S_{20}=\frac{1}{120}(21\cdot 22\cdot 23\cdot 24\cdot 5)=10626$

1 or 48

2. 正實數 x 滿足 $(\log_2 x)(\log_4 x)(\log_6 x)=(\log_2 x)(\log_4 x)+(\log_2 x)(\log_6 x)+(\log_4 x)(\log_6 x)$，則 $x=$ ________。

$\boxed{2}$ $\log_2 x\log_4 x\log_6 x\ne 0 \Rightarrow \log_x(2\cdot 4\cdot 6)=1 \Rightarrow x=48$

$=0 \Rightarrow x=1$

2160

3. 設 n 為正整數，定義 $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 3\times 2\times 1$。試問 $10!\times 9!\times 8!\times\cdots\times 3!\times 2!\times 1!$ 的正因數中是完全平方數的共有 ________ 個。

$\boxed{3}$ $2^9\cdot 3^8\cdot 4^7\cdot 5^6\cdot 6^5\cdot 7^4\cdot 8^3\cdot 9^2\cdot 10^1$ $=(2^2)^{19}(3^2)^8\cdot(5^2)^3\cdot(7^2)^2\cdot 3\cdot 5$

$=2^{9+14+9+1}\cdot 3^{8+5+4}\cdot 5^7\cdot 7^4$ $\quad 20\cdot 9\cdot 4\cdot 3=2160$

9

4. 有一多項式 $f(x)$，若 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 餘 $3x+2$，則 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3f(1)-f(x^2)}{x-1}=$ ________。

$\boxed{4}$ $f(x)=(x-1)^2Q(x)+3x+2$

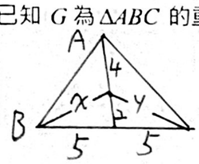
$f(1)=5,\ f'(1)=3$

$\dfrac{3x^2\cdot 5-f'(x^2)\cdot 2x}{1}\xrightarrow{x=1} 9$

$\frac{63}{2}$

5. 已知 G 為 ΔABC 的重心，$\overline{BC}=10$，$\overline{AG}=4$，$\angle BGC=\frac{3\pi}{4}$，則 ΔABC 的面積為________平方單位。

$\boxed{5}$



$100=2(25+4)-2xy\cdot\frac{1}{\sqrt2}$ $\Rightarrow 3\left(\frac{xy}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt2}\right)=\frac{63}{2}$

6. 若 n 為自然數，則 $C_2^2+C_2^4+C_2^6+\cdots+C_2^{2n}=$ ________（請以 n 的形式表示）

$\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$

$\boxed{6}$ $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k(2k-1)}{2}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(k(k-1)+k^2\right)=\dfrac{(n+1)n(n-1)}{3}+\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\dfrac{n(n+1)(4n-1)}{6}$

$\frac{2}{3}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}[(n^3+2n^2+3)^{\frac13}-(n^2+5)^{\frac12}]=$ ________。

$\boxed{7}$ 法1 $\left((n^3+2n^2+3)^{\frac13}-(n^3)^{\frac13}\right)-\left((n^2+5)^{\frac12}-(n^2)^{\frac12}\right)=\dfrac{2n^2+3}{(n^3+2n^2+3)^{\frac23}+(n^3+2n^2+3)^{\frac13}(n^3)^{\frac13}+(n^3)^{\frac23}}-\dfrac{5}{(n^2+5)^{\frac12}+(n^2)^{\frac12}}\to\dfrac{2}{3}$

$\boxed{7}$ $(1+\square)^n\to 1+n\square$, $\square\to 0$

法2 $n\left(1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^3}\right)^{\frac13}-n\left(1+\frac{5}{n^2}\right)^{\frac12}$

$\to n\left(1+\frac13\left(\frac2n+\frac{3}{n^3}\right)\right)-n\left(1+\frac12\left(1+\frac{5}{n^2}\right)\right)$

$\to\frac23$

法3：令 $t=\frac1n$

$\dfrac{(3t^3+2t+1)^{\frac13}-(5t^2+1)^{\frac12}}{t}$

$\to\frac13(3t^3+2t+1)^{-\frac23}(9t^2+2)-\frac12(5t^2+1)^{-\frac12}(10t)\xrightarrow{t\to 0}\frac23$

2^8

8. 若 x 為正整數且滿足 $2^x=x^{32}$ 則 $x=$ ________。

$\boxed{8}$ $x=2^n \Rightarrow 2^{2^n}=2^{32n} \Rightarrow 2^n=32n \Rightarrow n=8 \Rightarrow 2^8$

(一一代入)

3

9. 求 2^{2025} 的十位數為

$\boxed{9}$

2	32	12	92	72	52
4	64	24	84	44	04
8	28	48	68	88	⋮
16	56	96	36	76	

$2025\equiv 5\pmod{20}$

$\Rightarrow 3$

$\boxed{10}$ $(n-1)!=23n^2-64n+41=23n(n-1)-41(n-1)$

$\Rightarrow 23n=(n-2)!+41$，一一代入 $\Rightarrow n=7$

7

10. 若 n 為自然數且滿足 $n!=23n^3-64n^2+41n$，這裡 $n!$ 代表 n 的階乘數，求 $n=$ ________。

二、計算證明題(每題 10 分，共 40 分)

1. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4^n}$ 之值。

$\frac{20}{27}$

$X \sim Geo(p=\frac{3}{4})$

$Var(X)=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{4}{9}=EX^2-\frac{16}{9}$

$\Rightarrow \frac{20}{9}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{3}{4}\cdot 4 \Rightarrow \frac{20}{27}$

2. 設a , b, c, d, e 是滿足a + 2b + 3c + d + e = 8，$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16$ 的實數，求e的最大值。

$\frac{1+3\sqrt{5}}{2}$

$(16-e^2)(1^2+2^2+3^2+1^2)\ge(8-e)^2=e^2-16e+64$

$\Rightarrow 16e^2-16e+16(4-15)\le 0$

$\Rightarrow \frac{1-3\sqrt{5}}{2}\le e\le\frac{1+3\sqrt{5}}{2}$

"=" 成立 ……

3. (1) ΔABC 中，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$，則 $\cos A=$? (5分) $\frac{1}{2}$

(2) ΔABC 中，$2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$，則 $\cos A=$? (5分) $\frac{1}{\sqrt{10}}$

(1) $ac\cos B=ab\cos C=bc\cos A \Rightarrow a^2+c^2-b^2=a^2+b^2-c^2=b^2+c^2-a^2 \Rightarrow a=b=c \Rightarrow$ 正$\triangle \Rightarrow \frac{1}{2}$

(2) $2\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow -2c^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-b^2=-3\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow 5\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2c^2$ $\Rightarrow \frac{10}{4\cdot 4}=\frac{c^2}{b^2}$

$4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=b^2$ $\Rightarrow \frac{c}{b}=\frac{\sqrt{10}}{4}$

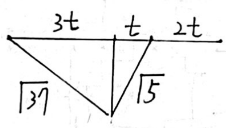
$4\cdot bc\cos A=b^2$

$\Rightarrow \cos A=\frac{1}{\sqrt{10}}$

4.

(2)

法2



$37-9t^2=5-t^2 \Rightarrow t=2$

設 $L: mx-y-(m-2)=0$

$1=d(0,L)=\frac{|m-2|}{\sqrt{m^2+1}}$

$\Rightarrow m=\frac{3}{4} \Rightarrow 3x-4y=-5$

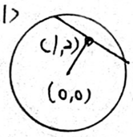
or $x=1$

4. 直角坐標系中，已知有一圓方程式為 $x^2 + y^2 = 37$，且圓的內部有一點 $P(1,2)$。

(1)若 P 點為圓的某弦的中點，試求此弦所在的直線方程式。(5 分) $x+2y=5$

(2)若 P 點為圓的某弦的一個三等分點，試求此弦所在的直線方程式。(5 分) $3x-4y+5=0,\ x=1$

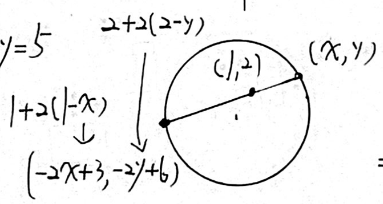
(1)



$\vec{n}=(1,2)$

$x+2y=5$

(2) 法1:



$4\cdot 37-12(x+2y)+9+36=37$

$\Rightarrow x+2y=\frac{4\cdot 37+8}{12}=13$

$\begin{cases} x^2+y^2=37 \end{cases}$

$\Rightarrow (13-2y)^2+y^2=37$

$\Rightarrow 5y^2-52y+132=0$

$\begin{matrix} 5 & -22 \\ 1 & -6 \end{matrix}$

$\Rightarrow (1,6) \Rightarrow x=1$

or $\left(\frac{21}{5},\frac{22}{5}\right)$

$\Rightarrow m=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow 3x-4y=-5$