國立屏東高中114學年第1次正式教師甄試數學科筆試試題(含詳解)

2026.1.6(二) ~ 1.11(日) Ru

一、填充題:每題5分，共50分

[1] $P(x)=(x+1)(x-1)(x+i)(x-i)=(-1-x)(1-x)(-i-x)(i-x) \Rightarrow f(-1)\ f(1)\ f(-i)\ f(i)=0$

1. 設方程式$x^5+x^4-x^2+1=0$的五個根為$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$，令$P(x)=x^4-1$，則$P(\alpha_1)\times P(\alpha_2)\times P(\alpha_3)\times P(\alpha_4)\times P(\alpha_5)=$______。 0

[2] $(x')^2+(y')^2\le 1000$

$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13&-9\\9&13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

2. 求座標平面上$(13x-9y+5)^2+(9x+13y-4)^2\le 1000$的區域面積為______。 4π

$A'=250\cdot A \Rightarrow A=4\pi$

3. 已知P點在函數$y=2e^x$上，Q點在函數$y=\ln\frac{x}{2}$上，試求$\overline{PQ}$長度的最小值為______。 $\sqrt{2}(1+\ln 2)$

[3] $\frac{y}{2}=e^x$ 　$L: x-y=0$ 　$\Rightarrow 1=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x}$ $\Rightarrow x=1 \Rightarrow \sqrt{2}(1+\ln 2)$

互為反函數 $\frac{x}{2}=e^y$ 　$\frac{d}{dx}\left(2\cdot\frac{x-\ln\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right)=0$

[4] $\frac{6}{(k+2)(k+1)}=6\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right) \Rightarrow 6\cdot\frac{1}{2}=3$

4. 無窮級數$\frac{1}{C_3^3}+\frac{2}{C_3^4}+\frac{3}{C_3^5}+\dots+\frac{k}{C_3^{k+2}}+\dots$之和為______。 3

5. a、b為常數，若兩個方程式$x^2-x+a=0$和$x^2-x+b=0$的四個根形成一個首項為$\frac{1}{4}$的等差數列，則此數列的公差為______。 $\frac{1}{6}$

[5] $\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}+3d\right)=1 \Rightarrow d=\frac{1}{6}$

[6] $4x_1^2-y_1^2=9$

$4x_2^2-y_2^2=9$

$\Rightarrow 4(x_1-x_2)\cdot 8=(y_1-y_2)\cdot 4$

$\Rightarrow m=8$

$\Rightarrow 8x-y=30$

6. 雙曲線$4x^2-y^2=9$之弦被點$(4,2)$平分，則此弦所在的直線方程式為______。 $8x-y-30=0$

7. 平面上ΔABC，其中$\overline{AB}=7$，$\angle ACB=60^0$，且$\overline{CA}$，$\overline{CB}$皆為整數，則符合條件的三角形有多少個______。 5

[7] $49=a^2+b^2-ab\ge ab$, $D\ge 0 \Rightarrow a^2\ge 4(a^2-49)$

$x^2-ax+a^2-49=0 \Rightarrow 3a^2\le 196 \Rightarrow a\le 8$

$a=8$ 　$b^2-8b+15=0 \Rightarrow b=5$ or 3

8,5 　8,3 　7,7 $\Rightarrow$ 5個

8. 複數平面上有三點P、Q、R對應三個複數Z_1、Z_2、Z_3且$|Z_1|=\sqrt{2}$，$|Z_2|=\sqrt{5}$，$|Z_3|=3$，若原點O為ΔPQR之重心，則$\overline{Z_1}\cdot Z_2$的實部為______。 1

[8] $Z_1(a+bi)$

$Z_2(c+di)$

$Z_3(-(a+c)-(b+d)i)$

$a^2+b^2=2$ 　$(a+c)^2+(b+d)^2=9$

$c^2+d^2=5$

$Re(\overline{Z_1}\cdot Z_2)=ac+bd=\frac{9-5-2}{2}=1$

9. 連續丟擲一公正的硬幣，過程中若連續三次擲出正面就停止，若恰好擲了8次才停止，則第一次擲出正面的機率為______。 $\frac{6}{13}$

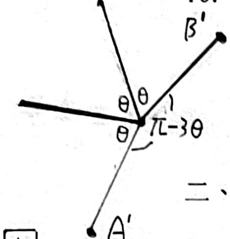
[9]

$\boxed{\quad\quad}$	$\boxed{-+++}$	
----	1	0
+---	4	1
++--	6	3
$\boxed{++}-\boxed{+}$	2	2
和	13	6

$\Rightarrow \frac{6}{13}$

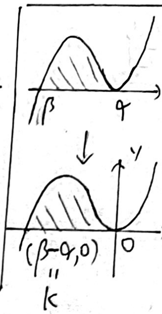
互換 2种

$\boxed{10}$ yymath



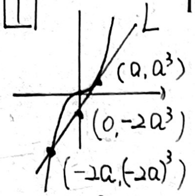
10. 給定一個邊長為 9 的正四面體 ABCD，設 A' 為 A 對於平面 BCD 的對稱點，B' 為 B 對於平面 ACD 的對稱點，則線段 $\overline{A'B'}$ 之長為_____。 15

$\cos(\pi-3\theta)=4\cdot\frac{1}{27}-3\cdot\frac{1}{3}=\frac{-23}{27} \Rightarrow \left(\frac{9}{2}\sqrt{3}\right)^2\left(1+1-2\cdot\frac{-23}{27}\right)=\frac{81\cdot3}{4}\cdot2\cdot\frac{50}{27} \Rightarrow 15$



二、計算題:每題 10 分，共 50 分

$\boxed{1}$



$L: (3a^2)x-y=2a^3$

$y=x^3$

1. 在 $\Gamma: y=x^3$ 上有一點 P，已知 P 在第一象限且其 x 坐標為 a，現以 P 為切點作 Γ 之切線 L 交 y 軸於點 Q，且交 Γ 於另一點 S，試求：

(1) $\overline{PQ}:\overline{QS}$。 $\overline{PQ}:\overline{QS}=1:2$

$\Rightarrow x^3-(3a^2)x+2a^3=0$

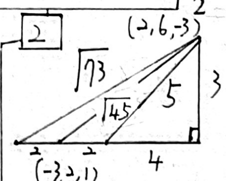
$1:2 \Leftarrow Q(-2a,(-2a)^3)$

(2) Γ 與切線 L 所圍成之封閉區域的面積。(以 a 表示) $\frac{27}{4}a^4$

$\frac{1}{12}(3a)^4=\frac{27a^4}{4}$

$Area=\int_k^0 ax^2(x-k)\,dx=a\left(\frac{-k^4}{4}+\frac{k^4}{3}\right)=\frac{a}{12}(\alpha-\beta)^4$

$\boxed{2}$



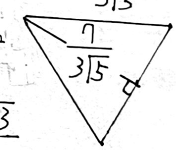
2. 空間中一定點 $A(2,6,-3)$，一平面 $E: x+2y+2z+1=0$，已知平面 E 上有一圓 C，圓心為 $Q(-3,2,-1)$，半徑為 2，若動點 P 在圓 C 上，試求 $\overline{AP}$ 之最大值與最小值。 最大值為$\sqrt{73}$、最小值為 5

$\boxed{3}$ $(2,4,5)=\vec{n}$

$|\overrightarrow{AB}||\cos\theta| = \left|\frac{(3,-2,-1)\cdot(2,4,5)}{3\sqrt{5}}\right|$

3. 空間中兩歪斜線 $L_1: \frac{x-3}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{-2}$，$L_2: \frac{x}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-2}$，若正△$PQR$ 中，P 在 L_1 上，且 Q、R 都在 L_2 上，求△PQR 的最小面積為。 $\frac{49\sqrt{3}}{135}$

$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(2\cdot\frac{7}{3\sqrt{15}}\right)^2=\frac{49\sqrt{3}}{135}$



$\boxed{4}$ 令 $\alpha=A-B$, $\beta=B-C$, $\gamma=C-A$

$\alpha+\beta+\gamma=0$ (or $\alpha+\beta+\gamma=\pi$)

$\cos^2\alpha+\frac{1}{2}(\cos2\beta+\cos2\gamma)+1=\cos^2\alpha+\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)+1$

4. 試求 $\cos^2(A-B)+\cos^2(B-C)+\cos^2(C-A)$ 的最小值為。 $\frac{3}{4}$

$\geq \cos^2\alpha-|\cos\alpha|+1=\left(|\cos\alpha|-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$

14年 香港隊選拔 知乎

5. 一個外星人來到地球後，每天選擇以下四件事中的一件完成，每件事選擇的機率相等(即每個選擇發生的機率為 0.25)：

(1) 自我毀滅
(2) 分裂成兩個外星人
(3) 分裂成三個外星人
(4) 什麼也不做

$\boxed{5}$ 此後每天，每個外星人均會做一次選擇，且彼此之間互相獨立，求地球上沒有外星人的機率為。 $\sqrt{2}-1$

設 $f(n)\equiv n$ 個外星人皆消失的机率

所求：$f(1) \Rightarrow f(n)=(f(1))^n$

令 $p=f(1)$

$f(1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}f(1)+\frac{1}{4}f(2)+\frac{1}{4}f(3)$

$\Rightarrow p^3+p^2-3p+1=0 \Rightarrow p=\sqrt{2}-1$