新竹市立成德高級中學 114 學年度 第一次教師甄試 數學科題目卷

1. 本份試卷**不可使用計算機**。
2. 考試完畢，請**交回所有試卷及計算紙**並在題目卷右上角**寫上准考證號碼**。

本試卷共 1 頁

2026.1.2(五) ~ 1.6(二) Ru

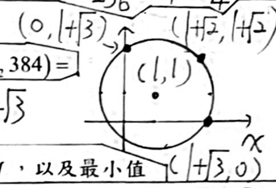
以下答案皆為填充題，無須計算過程，須於答案卷上清楚書寫題號及答案。答案須化為**最簡分數**或**有理化**，答案須**完全正確**才給分

$\boxed{1}$ $256=2^8<384<2^9=512$, $8<\log_2 384<9$ $f(\log_2 384-8)=\frac{384}{256}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$

第一部份　填充題（每題 8 分），共 80 分

$(\square-2)+2\to(\square-2)-2=\square-4\to\square-8$

$\frac{7}{4}$ 1. 設函數 $f(x)$ 在實數域上滿足 $f(x+2)=f(x-2)$，若已知在區間 $(0,1)$ 上，$f(x)=2^x+\frac{1}{4}$，則 $f(\log_2 384)=$



$\boxed{2}$ $(\log_a x-1)^2+(\log_a y-1)^2=4$ $\log_a x=2\cos\theta+1$ $\log_a y=2\sin\theta+1$ $M=2+2\sqrt2$, $m=1+\sqrt3$

$(2+2\sqrt2, 1+\sqrt3)$ 2. 設 x,y 為實數，且 $x,y\ge1$。若 $(\log_a x)^2+(\log_a y)^2=\log_a ax^2+\log_a ay^2$，$a>1$，則 $\log_a xy$ 的最大值 M，以及最小值 m，所成的數對 $(M,m)=$

$\boxed{3}$ $\sin C=\frac{5}{16}$ $1+(2\cos A\cos B)\cos C+\cos^2B+\cos^2A-\cos^2C$ $\cos(A+B)\cos(A-B)$

$=1+(\cos(A+B)+\cos(A-B))\cos C+1+\frac{1}{2}(\cos 2B+\cos 2A)-\cos^2 C$

$\frac{25}{128}$ 3. 已知 ΔABC 中，$\overline{AB}=5$ 且外接圓半徑為 8，試求 $\begin{vmatrix}-1&\cos C&\cos B\\ \cos C&-1&\cos A\\ \cos B&\cos A&1\end{vmatrix}=$

$=2-2\cos^2C=2\sin^2C=\frac{25}{128}$ #

$\boxed{4}$ $\begin{matrix}-3 & -1 & 2 & -3 & -1 & -2\\ 3 & -2 & -3 & 3 & -2 & -3\end{matrix}$ $\begin{matrix}7 & -3 & 9\end{matrix}$ 令 $P(c,s,0)$

$x+y+z+u=12$

$\begin{matrix}6&6\\5&5\\4&4\\3&3\\2&2\\1&1\\0&0\end{matrix}$ $\frac{455-49}{2}=203$

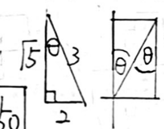
$9+\sqrt{58}$ 4. 坐標空間中一平行六面體，某一底面的其中三頂點為 $(0,3,2),(-3,2,4),(3,1,-1)$，另一面之一頂點在 xy 平面上且與原點距離為 1。滿足前述條件之平行六面體中，最大體積為

$\boxed{4}$ $|(\vec u\times\vec v)\cdot\vec w|=|(7,-3,9)\cdot(c,s-3,-2)|=|7c-3s-9|\le 9+\sqrt{58}$ $\boxed{5}$ $\frac{H^4_{12}-(H^2_0+H^2_2+H^2_4+H^2_6+\cdots+H^2_{12})}{2}$

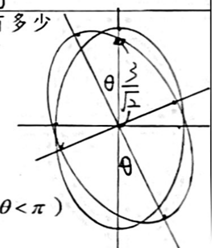
203 5. 有 16 顆相同的球要全部分給甲、乙、丙、丁四人，每人至少分得一顆。若僅考慮四人所獲得球的數量，則共有多少種分球的方式，使得甲獲得球的數量大於乙獲得球的數量為

$\boxed{6}$ $\left(2e^{i(\frac{4}{3}\pi)}\right)^{50}$ $\Rightarrow\frac{2^{100}(-1)}{2\cdot2^{50}\cos(2\pi/3)}=2^{50}\Rightarrow50$

$\boxed{7}$



$\frac{3}{\sqrt2}\left(\frac{2}{3},\frac{\sqrt5}{3}\right)=\left(\sqrt2,\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$



50 6. 若 $\begin{bmatrix}-1&\sqrt3\\-\sqrt3&-1\end{bmatrix}^{50}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，則 $\log_2\frac{bc-ad}{a+b+c+d}=$

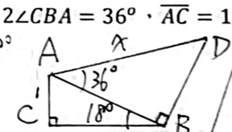
$\left(\sqrt2,\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ 7. 坐標平面上，設 Γ 為中心在原點且長軸落在 y 軸上的橢圓。已知對原點逆時針旋轉 θ 角（其中 $0<\theta<\pi$）的線性變換將 Γ 變換到新橢圓 Γ': $41x^2+4\sqrt5xy+40y^2=180$，點 $\left(\frac{2\sqrt5}{3},-\frac{5}{3}\right)$ 為 Γ' 上離原點最遠的兩點之一。

已知在 Γ 上的一點 P 經由此旋轉後得到的點 P' 落在 y 軸上，且 P' 點的 y 坐標大於 0。則 P 點的坐標為

$\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt3}{8\pi}$ $\boxed{8}$ $\frac{3}{\pi}\cdot\frac{\frac{\pi}{3}}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\left(k\cdot\frac{\frac{\pi}{3}}{n}\right)\to\frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2(t)\,dt=\frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}(1-\cos(2t))\,dt=\frac{1}{2}-\frac{3}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin(2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$

8. 設 $S_n=\sin^2\left(\frac{\pi}{3n}\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi}{3n}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{3n}\right)+\cdots+\sin^2\left(\frac{n\pi}{3n}\right)$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=$______。 $=\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt3}{8\pi}$

4 9. 在平面上，已知 ΔABC 和 ΔABD 都是直角三角形，$\angle ACB=\angle ABD=90^\circ$，$\angle DAB=2\angle CBA=36^\circ$，$\overline{AC}=1$，則 $\overline{AD}=$______。 $\boxed{9}$ $x=4$ # $\Leftarrow x\sin72^\circ=4(x\cos36^\circ\sin18^\circ)\cos18^\circ=4\cos18^\circ$



$10^{\frac{2025}{2}}$

$10^{\frac{2025}{2}}$ 10. 已知 $<a_n>$ 為等比數列，且 $\sum_{i=1}^{2025}(a_i\times\log a_i)=2$，$\sum_{i=1}^{2025}(a_{2026-i}\times\log a_i)=-1$，則 $(a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{2025})^{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2025}}=$

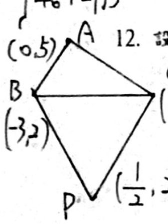
$\boxed{10}$ $a_1^{a_1}a_2^{a_2}\cdots a_{2025}^{a_{2025}}=10^2$ $a_1^{a_{2025}}a_2^{a_{2024}}\cdots(a_{2025})^{a_1}=10^{-1}$ $\Rightarrow(a_{1013})^{2025\cdot2(a_1+\cdots+a_{2025})}=10^{2025}$

第二部份　填充題（每題 10 分），共 20 分

$\Rightarrow(a_1a_{2025})^{a_1}(a_2a_{2024})^{a_2}\cdots(a_{2025}a_1)^{a_{2025}}=(a_{1013})^{2(a_1+\cdots+a_{2025})}=10$

11. 設 $a,b\in R$ 且 $c=\sqrt{(a+3)^2+(b-2)^2}+\sqrt{(b-2)^2+(a-4)^2}+\sqrt{a^2+(b-5)^2}$，求 c 的最小值______。

$\sqrt{46+21\sqrt3}$



12. 設 ΔABC 中，三個內角 A,B,C 所對應的邊分別為 a,b,c，若 $\angle B=60^\circ$，且 $b^2=\frac{9}{2}ac$，則 $\sin A+\sin C=$ $\frac{\sqrt{15}}{2}$。

$\boxed{11}$ Fermat point $\overline{AP}=\sqrt{46+21\sqrt3}$

$\boxed{12}$ $\frac{3}{4}=\sin^2B=\frac{9}{2}\sin A\sin C$

試題結束 ~ !!

$b^2=a^2+c^2-ac=\frac{9}{2}ac$ $\Rightarrow(a+c)^2=\frac{15}{2}ac$

$\sin A+\sin C=\sqrt{\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{6}}=\frac{\sqrt{15}}{2}$