臺北市立內湖高級中學

114 學年度第 2 次正式教師甄選數學科初選筆試試題卷

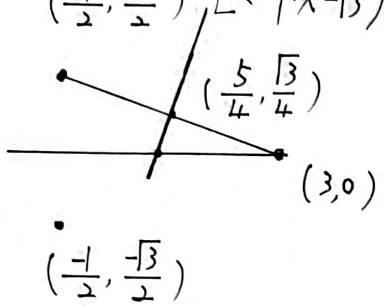
9. 考慮方程式 $z^3-2z^2-2z-3=0$ 的三個相異根，這三個根在複數平面上所成三角形的外心為 $a+bi$，a,b 為實數，求數對 $(a,b)=$ ______。

$\left(\frac{8}{7},0\right)$

$$\begin{array}{r|rrrr|l} & 1 & -2 & -2 & -3 & 3 \\ + & & +3 & +3 & +3 & \\ \hline & 1 & +1 & +1 & +0 & \end{array}$$

$z=3$ or $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $L: 7x-\sqrt{3}y=8$ 过 $\left(\frac{8}{7},0\right)$



10. 設 a，b 為實數。若函數 $f(x)=\frac{2ax+b}{x^2+1}$ 的最大值為 3，最小值為 -2，求數對 $(a,b)=$ ______。

$(\pm\sqrt{6},1)$

$\frac{2ax+b}{x^2+1}=k$ $\quad D\ge 0 \Rightarrow a^2-k(k-b)\ge 0$

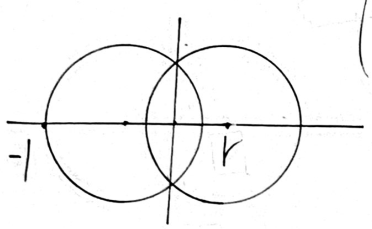
$\Rightarrow kx^2-2ax+k-b=0$ $\quad \Rightarrow k^2-bk-a^2=(k-3)(k+2)=k^2-k-6$

$\Rightarrow (\pm\sqrt{6},1)$

11. 坐標空間中，球 A 的球心坐標為原點 $O(0,0,0)$，半徑為 1；球 B 的球心坐標為 $P(r,0,0)$，半徑為 1，其中 $0<r<2$。設 V 為球 A 與球 B 的聯集所形成的體積，試將 V 寫為 r 的函數為 $V(r)=$ ______。

（註：「球 A 與球 B 的聯集」指的是由球 A 和球 B 中至少一個球體包含的所有點所構成的立體圖形）

$-\frac{\pi}{12}r^3+\pi r+\frac{4}{3}\pi$



$x=\frac{r}{2}$

$\left(\pi\int_{-1}^{\frac{r}{2}}(1-x^2)\,dx\right)\times 2$

$=\left(\frac{r}{2}+1-\frac{r^3}{24}-\frac{1}{3}\right)2\pi$

$=-\frac{\pi r^3}{12}+\pi r+\frac{4}{3}\pi$

12. 設 x 為實數且 x 不是整數，若 $x+\frac{114}{x}=[x]+\frac{114}{[x]}$，則 $x=$ ______。（$[x]$ 表示不大於 x 的最大整數。）

$\frac{-114}{11}$ 令 $x=n+b$，$n\in\mathbb{Z}$，$0\le b<1$

$\Rightarrow b=\frac{114b}{n(n+b)} \Rightarrow n(n+b)=114 \Rightarrow$

$n=10 \Rightarrow b=\frac{14}{10}$ 不合

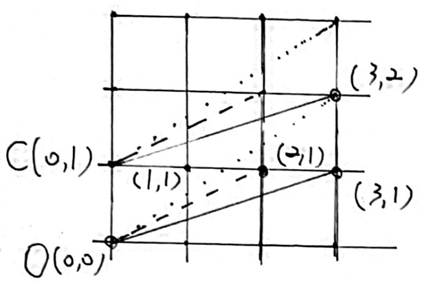
or

$n=-11 \Rightarrow b=\frac{7}{11} \Rightarrow -11+\frac{7}{11}=\frac{-114}{11}$

臺北市立內湖高級中學
114 學年度第 2 次正式教師甄選$\boxed{\text{數學科}}$初選筆試試題卷

13. 坐標平面上，x 坐標與 y 坐標皆為整數的點稱為「格子點」。考慮坐標平面上四點 $O(0,0)$、$A(a,b)$，$B(a,b+1)$，$C(0,1)$，其中 a 與 b 為互質的正整數，且 $a>1$。若平行四邊形 $OABC$ 的內部（不含邊界）的格子點分別為 $P_1, P_2, \cdots, P_k$，試求所有 $\triangle OP_iA$（$i=1, 2, \cdots, k$）的面積中最小值為______。

$\frac{1}{2}$

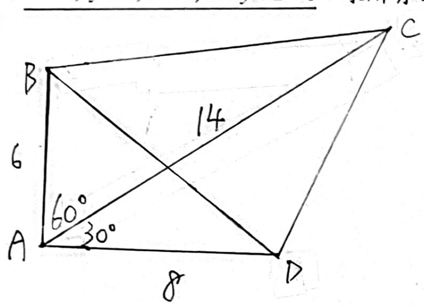


$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

14. 設平面上的一個四邊形 $ABCD$，$\angle BAD=90^\circ$，$\angle BAC=60^\circ$，已知 $\overline{AB}=6$，$\overline{AD}=8$，$\overline{AC}=14$。若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AD}$，其中 $x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x+y+z=1$，求所有 P 點所形成區域的面積為 ________。

$x+y+z$

$4+2\sqrt{3}$



$\triangle ACD+\triangle ABC-\triangle ABD$

$=28+2\sqrt{3}-24$

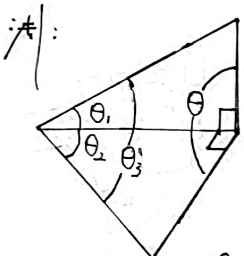
$=4+2\sqrt{3}$

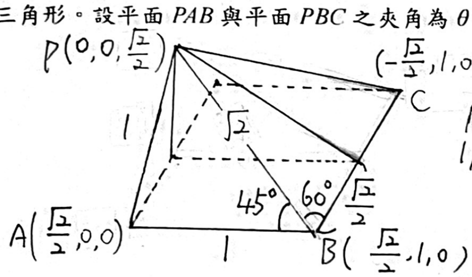
P在 $\triangle BCD$ 內部 or 边上

15. 有一底面為長方形的四角錐 $P-ABCD$，其展開圖如右圖所示，其中 $\overline{AD}=\sqrt{2}\,\overline{AB}$，且 $\triangle P_1AB$、$\triangle P_2AD$、$\triangle P_3CD$ 均為等腰直角三角形。設平面 PAB 與平面 PBC 之夾角為 θ，求 $\sin\theta$ 為________。

$\frac{\sqrt{6}}{3}$

法1:

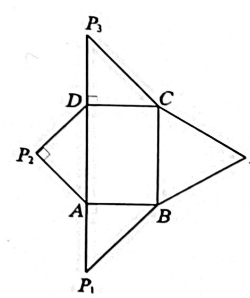




法2

1 0 0 1 0 0   0 1 0 0 1 0
1 √2 −1 1 √2 −1   −1 0 1 −1 0 1

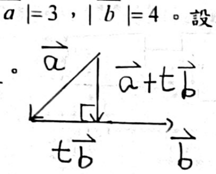
$$\frac{(0,1,\sqrt{2})\cdot(1,0,1)}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$\cos\theta=\frac{\cos\theta_3-\cos\theta_1\cos\theta_2}{\sin\theta_1\sin\theta_2}=\frac{\cos 90^\circ-\cos 45^\circ\cos 60^\circ}{\sin 45^\circ\sin 60^\circ}=\frac{-1}{\sqrt{3}}\Rightarrow \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

16. 設 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 為兩不平行的非零向量，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$。設 $t=k$ 為滿足 $|\vec{a}+t\vec{b}|$ 為最小的實數，求 $\vec{b}\cdot(\vec{a}+(k-2)\vec{b})=$__________。

-32



$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow -2\vec{b}\cdot\vec{b}=-32$