一、填充題 $2025.12.27$(六) $\sim 2025.12.29$(一) Ru

1. 設多項式 $f(x)=2x^2-x-6$ 且 c 為實數。若 $f(f(x))$ 與 $f(x)\times f(x)$ 除以 $x-c$ 有相同的餘式，則此餘式為_______。

4 or 9

$2(2c^2-c-6)^2-(2c^2-c-6)-6=(2c^2-c-6)^2$

$t^2-t-6=0 \quad (t=2c^2-c-6)$

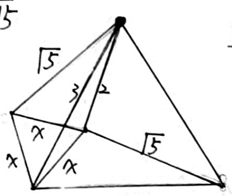
$t \quad -3$

$t \quad +2$

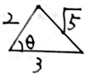
$\Rightarrow t^2=9$ or 4

2. 設有一個邊長為 3 的正$\triangle ABC$，點 P 在$\triangle ABC$ 的內部，若 $\overline{PB}=2$、$\overline{PC}=\sqrt{5}$，求 $\overline{PA}^2$ 為_______。

$9-2\sqrt{15}$



$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}(5+9+4)-3\sqrt{5}\right)\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow x^2=9-2\sqrt{15}$



$\cos\theta=\frac{9+4-5}{2\cdot2\cdot3}=\frac{2}{3}$

$\triangle=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}$

3. 從 2 到 2025 的連續整數中，任意選出兩個數字 a 與 b(數字可重複)，則整數 3^a+7^b 的個位數字是 8 的機率為_____。

$\frac{3}{16}$

	3^a	7^b	8
$4k+1$	3	7	$9+9$
$4k+2$	9	9	$1+7$
$4k+3$	7	3	$7+1$
$4k$	1	1	

$(2025-2+1)=2024\equiv0 \pmod 4$

$\Rightarrow \frac{1\cdot1\cdot3}{4\times4}=\frac{3}{16}$

4. 求 $C_1^{2025}-C_3^{2025}+C_5^{2025}-C_7^{2025}+\cdots-C_{2023}^{2025}+C_{2025}^{2025}$ 之值為_______。

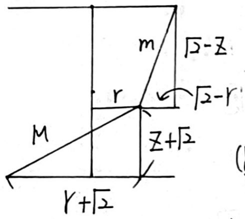
2^{1012}

$I_m(1+i)^{2025}=I_m\left(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{2025}=2^{\frac{2025}{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2^{\frac{2025}{2}-\frac{1}{2}}=2^{1012}$

17. 空間中，考慮以下兩圓 C_1 與 C_2：C_1 是平面 $z=\sqrt{2}$ 上圓心在 $(0,0,\sqrt{2})$，半徑為 $\sqrt{2}$ 的圓；C_2 是平面 $z=-\sqrt{2}$ 上圓心在 $(0,0,-\sqrt{2})$，半徑為 $\sqrt{2}$ 的圓。給定 $P(x,y,z)$ 為空間中的一點，設 P 到圓 C_1 上任一動點距離的最小值為 m，P 到圓 C_2 上任一動點距離的最大值為 M，並將 $\sqrt{x^2+y^2}$ 記作 r（即 $r=\sqrt{x^2+y^2}$）。若 $M+m=2\sqrt{6}$，試求此條件下 r 與 z 的關係式為

$r^2-rz+z^2-3=0$.

$P(r,z)$, $F_1(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $F_2(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$



$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2\sqrt{6}$, $a=\sqrt{6}$, $c=2$, $b=\sqrt{2}$

$\Gamma: \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$

$x+iy \xrightarrow{45^\circ} r+iz$

$\xleftarrow{-45^\circ}$

$x+iy=(r+iz)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}(r+z)+i\frac{1}{\sqrt{2}}(-r+z)$

$\frac{(r+z)^2}{12}+\frac{(r-z)^2}{4}=1 \xleftarrow{\text{代入}\Gamma}$

$\Rightarrow 4(r^2+z^2-rz)=12$

$\Rightarrow r^2+z^2-rz=3$ #

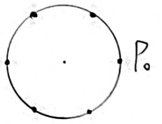
18. 設 a,b 為實數。坐標平面上，點 $P_n(x_n,y_n)$（$n=0,1,2,3,\cdots$）滿足以下定義：

$\left(\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\begin{cases}(x_{n+1},y_{n+1})=(ax_n-by_n,bx_n+ay_n), & n=0,1,2,3,\cdots\\(x_0,y_0)=(1,0)\end{cases}$$

若 $P_0=P_6$，且 $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ 為坐標平面上相異的六點，試求數對 $(a,b)=$___________。

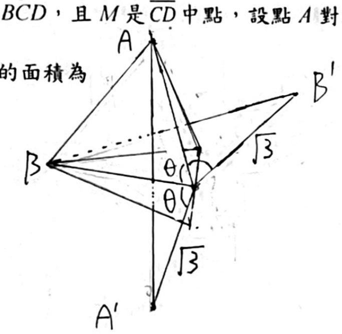
$\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$ $\quad e^{i\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)}$



$\Rightarrow\left(\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

5. 已知一個邊長為 2 正四面體 $ABCD$，且 M 是 $\overline{CD}$ 中點，設點 A 對於平面 BCD 的對稱點為 A'，點 B 對於平面 ACD 的對稱點為 B'，求 $\Delta A'MB'$ 的面積為

$\frac{5\sqrt{2}}{9}$



$\cos\theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos 3\theta = \frac{4-27}{27} = \frac{-23}{27}$

$\Rightarrow \sin 3\theta = \frac{\sqrt{50\cdot 4}}{27}$

$\Delta = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{10\sqrt{2}}{27} = \frac{5\sqrt{2}}{9}$

6. 對於一組數據 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，定義 x_i 的 T 分數 T_i 計算方式為：$T_i = 50+10\times\frac{x_i-\mu_x}{\sigma_x}$，其中 μ_x 為 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的算術平均數，σ_x 為 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的標準差。現有某測驗分兩批考生施測：第一批施測的考生有 100 位，這 100 位考生原始測驗成績的平均分數為 60 分；第二批施測的考生有 50 位，這 50 位考生原始測驗成績的平均分數為 66 分。<u>小廷</u>是第一批施測的考生，他的原始測驗成績為 84 分。已知<u>小廷</u>的原始測驗成績在第一批施測的考生成績中，轉換得 T 分數為 62 分；<u>小廷</u>的原始測驗成績在全體（即兩批施測考生，共 150 人）考生成績中，轉換得 T 分數為 60 分。設第二批施測考生原始測驗成績的標準差為 σ 分，若 $\sigma=\sqrt{a}$，則 a 的值為________。

628

（註：同一考生不會參加這個測驗兩次。）

分子：$n_x^2\mu_x^2+n_y^2\mu_y^2-2n_xn_y\mu_x\mu_y$

$62 = 50+10\cdot\frac{84-60}{\sigma_x} \longrightarrow 20$

$\mu_{全} = \frac{100\times 60+50\times 66}{150} = 62$

$60 = 50+10\cdot\frac{84-62}{\sigma_{全}} \rightarrow 22$

$\sigma_{全}^2 = \frac{1}{n_x+n_y}\left(n_x(\mu_x^2+\sigma_x^2)+n_y(\mu_y^2+\sigma_y^2)-(n_x+n_y)\cdot\frac{(n_x\mu_x+n_y\mu_y)^2}{(n_x+n_y)^2}\right)$

$= \frac{n_xn_y(\mu_x-\mu_y)^2}{(n_x+n_y)^2}+\frac{n_x\sigma_x^2+n_y\sigma_y^2}{n_x+n_y}$

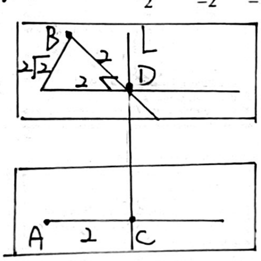
$484 = \frac{100\cdot 50\cdot(66-60)^2}{150\times 150}+\frac{100\times 400+50\cdot\sigma_y^2}{150}$

$\Rightarrow \sigma_y^2 = 476\times 3-800 = 628$

(114雄中)

7. 坐標空間中，設 A,B 兩點在某直線 L 上的投影點分別為 C,D。已知 $\overline{AC}=\overline{BD}=2$，且 AC,BD 兩直線方程式分別為 AC：$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{-1}$，$BD$：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-5}{-2}$，則 $\overline{AB}$ 的長度為________。

$\sqrt{33}$



$\begin{matrix} 2 & -2 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 2 & -2 \end{matrix}$

$(6,3,6)\,//\,(2,1,2)$

$E(-1,2,0)$

$F(1,3,5)$

$\overrightarrow{EF}=(2,1,5)$

$|\overrightarrow{EF}|\cdot\frac{\overrightarrow{EF}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{EF}||\vec{n}|} = \frac{15}{3} = 5$

$\cos\theta = \frac{(2,-2,-1)\cdot(1,2,-2)}{3\times 3} = 0$

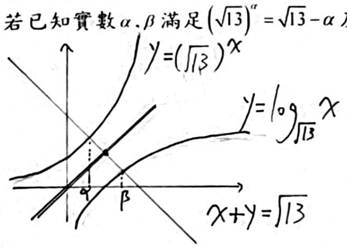
$\Rightarrow \theta = 90^\circ$

$\sqrt{5^2+(2\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{33}$

8. 若已知實數 α、β 滿足 $(\sqrt{13})^\alpha=\sqrt{13}-\alpha$ 及 $\log_{\sqrt{13}}\beta=\sqrt{13}-\beta$，則 $(\sqrt{13})^\alpha+(\alpha+\beta)^2+\log_{\sqrt{13}}\beta=$________。

$13+\sqrt{13}$



$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{13}}{2},\frac{\sqrt{13}}{2}\right) \Rightarrow 13+\sqrt{13}$