114 明倫高中

$\tan(\pi-(\beta+C))(\tan\beta+\tan C)$

4

12. 已知銳角三角形 ABC 中，滿足 $\sin(A)=\sin(B)\cdot\sin(C)$ ，求 $\tan(A)\cdot\tan(B)\cdot\tan(C)$ 的最小值為 (L) 。

有誤

修正：$\frac{16}{3}$

$\frac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{\cos B\cos C}=\frac{\sin B\sin C}{\cos B\cos C}$

$\Rightarrow \tan B+\tan C=\tan B\tan C$

$\Rightarrow 1=\frac{1}{\tan B}+\frac{1}{\tan C}\geq\frac{2}{\sqrt{\tan B\tan C}}\Rightarrow \tan B\tan C\geq 4$

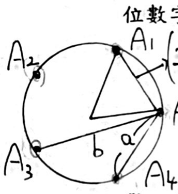
令 x $\frac{(\tan B+\tan C)^2}{\tan B\tan C-1}=\frac{x^2}{x-1}=x-1+\frac{1}{x-1}+2\geq 4$

"=" 成立 $\Leftrightarrow x-1=1\Rightarrow x=2$ (不合)

代 $x=4\Rightarrow 3+\frac{1}{3}+2=\frac{16}{3}$ (微分, 觀察圖形)

13. 已知連乘符號的定義為 $\prod_{k=1}^{n}a_k=a_1\times a_2\times\cdots\times a_n$ 。在坐標平面的單位圓上，有一個正五邊形，其頂點依逆時針方向分別為 A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 ，設 $P=\prod_{j=0}^{4}\prod_{k=j+1}^{4}\overline{A_jA_k}$ ，其中 $\overline{A_jA_k}$ 為頂點 A_j 與 A_k 的距離。若 P 的整數部分為 a 位數，且 P 的最高位數字為 b ，求數對 $(a,b)=$ (M) 。(已知 $\log 2\approx 0.3010$ ， $\log 3\approx 0.4771$ ， $\log 7\approx 0.8451$)

$(2,5)$



$\overline{A_0A_1}\ \overline{A_0A_2}\ \overline{A_0A_3}\ \overline{A_0A_4}$

$\overline{A_1A_2}\ \overline{A_1A_3}\ \overline{A_1A_4}$

$\overline{A_2A_3}\ \overline{A_2A_4}$

$\overline{A_3A_4}$

$(2\sin 72^\circ)$ $\sin^2 72^\circ\sin^2 144^\circ=\cos^2 18^\circ\sin^2 36^\circ$ $\Rightarrow a^2b^2=2^4\cdot\frac{1}{2^6}\cdot 20=5$

$=\frac{1+\cos 36^\circ}{2}\cdot\frac{1-\cos 72^\circ}{2}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1+\sqrt5}{4}\right)\left(1-\frac{-1+\sqrt5}{4}\right)$

$P=5^{\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{2}}=5^{\frac{5}{2}}\Rightarrow \log P\doteq\frac{5}{2}\cdot 0.699=1+0.7475$

$\doteq\log(5.\sim\cdot 10^1)$

14. 黛西在計算函數乘積的導函數時，誤將微分的乘法法則寫成 $(f\cdot g)'=f'\cdot g'$ ，而非正確的 $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$ ，然而，她算出的導函數結果卻恰好與正確的導函數相符。已知 $f(x)=x^2$，且函數 g 在包含 $x=3$ 與 $x=4$ 的某個開區間內可微，並且滿足 $g(3)=1$ ，請求出 $g(4)$ 的值為 (N) 。

$\frac{1}{4}$

$2xg(x)+x^2g'(x)=2xg'(x)$

$\ln g(x)=-2\ln|2-x|+C$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\ln g(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{2}{2-x}=-2\cdot\frac{d}{dx}\ln|2-x|$ $x=3\overset{代入}{\Rightarrow}C=0\Rightarrow \ln g(4)=-2\ln 2\Rightarrow g(4)=\frac{1}{4}$

二、 計算與證明題（共 30 分，請將詳細解題過程寫在答案卷上，不完整者酌予計分；請使用黑色或藍色原子筆作答。）

1. 設隨機變數 X 的機率分布符合幾何分布，即 $X\sim G(p)$，其中 $0<p<1$，則

$=p\cdot\frac{d}{dp}\left(\frac{p-1}{p}\right)$

(1) 證明 X 的期望值 $E(X)=\frac{1}{p}$ (8 分) $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}\cdot p=p\cdot\frac{d}{dp}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k(-1)\right)=p\cdot\frac{p-(p-1)}{p^2}=\frac{1}{p}$

(2) 某手機遊戲舉辦限時抽卡活動，每次抽卡可隨機獲得一名稀有角色，共有 4 名不同角色，抽到每名角色的機率均為 $\frac{1}{4}$。若玩家想要收集全部 4 名不同的角色，預期需要抽卡的次數之期望值為多少？ (7 分)

$\frac{25}{3}$

$X_i\equiv$ 抽到 #i 种角色所需的試行次數. $X_i\to Geo\left(p=\frac{4+1-i}{4}\right)$, $i=1,2,3,4$

$4\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{25}{3}$

所需試行次數 $Y=X_1+X_2+X_3+X_4\Rightarrow E(Y)=E(X_1+\cdots+X_4)=1+\frac{4}{3}+\frac{4}{2}+\frac{4}{1}=\frac{25}{3}$

2. 已知數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足遞迴式 $\begin{cases}a_1=0\\ a_{n+1}=\frac{10}{13}a_n+\frac{24}{13}\sqrt{4^n-(a_n)^2},\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$ ，試回答以下小題：

(1) 請求出 a_2, a_3 的值為何？ (6 分)

(2) 請找出 a_n 的一般項公式並證明。 (9 分)

$a_2=\frac{48}{13}$

$a_3=\frac{960}{169}$

$a_n=\begin{cases}0,\ n=1\\ 2^n\left(\frac{12}{13}\right),\ n=2k,\ k\in\mathbb{N}\\ 2^n\left(\frac{120}{169}\right),\ n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}\end{cases}$?

$\cos\alpha\cdot\sin\theta_n+\sin\alpha\cdot\cos\theta_n$

$a_{n+1}=2^{n+1}\left(\frac{5}{13}\cdot\frac{a_n}{2^n}+\frac{12}{13}\sqrt{1-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}\right)$

$2^{n+1}\cdot\sin(\theta_{n+1})=2^{n+1}\sin(\theta_n+\alpha)$, $\theta_1=0$ (M.I.)

$a_n=2^n\cdot\sin\theta_n=2^n\sin((n-1)\alpha)$

$\sin\alpha=\frac{12}{13}$, $\cos\alpha=\frac{5}{13}$

【試題結束，祝考試順利】