題目卷共3張單面

交卷時請全部繳回

臺北市立明倫高級中學114學年度第1次正式教師甄選

【數學科】初選試題卷

12.22(一) ~12.26(五) Ru

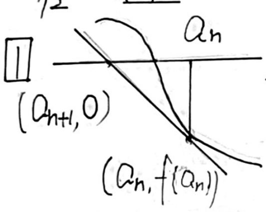
2025.12.8(一) ~12.9(二) stop

考生姓名：＿＿＿＿＿＿

一、 填充題（每格5分，共70分，請寫在答案卷上，答案須化為最簡分數或最簡根式）

$\frac{25}{72}$ 1. 請以牛頓法取初始值 $a_1=0$，求方程式 $x^3-3x+1=0$ 在 $0<x<1$ 範圍的實根之第三個近似值 $a_3=$ __(A)__。

$\boxed{1}$



$y-f(a_n)=f'(a_n)(x-a_n)$ 過 $(a_{n+1},0)$

$\Rightarrow a_{n+1}=a_n-\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$

$f(x)=x^3-3x+1$

$f'(x)=3x^2-3$

$a_2=0-\left(\frac{1}{-3}\right)=\frac{1}{3}$

$a_3=\frac{1}{3}-\frac{\frac{1}{27}}{\frac{-8}{3}}=\frac{25}{72}$

2025 2. 已知 $i=\sqrt{-1}$，若 $\frac{1}{i^{2025}}-\frac{2}{i^{2024}}+\frac{3}{i^{2023}}-\frac{4}{i^{2022}}+\cdots-\frac{2024}{i^2}+\frac{2025}{i}=a+bi$，其中 a,b 為實數，則 $a-b=$ __(B)__。

$\boxed{2}$

$1/i^{4k+1}=-i$

$1/i^{4k}=1$

$1/i^{4k-1}=i$

$1/i^{4k-2}=-1$

$$a-b=\begin{pmatrix}-2+4\\-6+8\\\vdots\\-2022+2024\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1+3\\-5+7\\\vdots\\-2021+2023\\-2025\end{pmatrix}=2025$$

? 6 3. 創創自稱射擊之命中率為 0.6。某日創創表演射擊，直到第 n 次時才首次命中靶面並停止，設隨機變數 X 的取值表示創創首次命中靶面之射擊次數，現在以顯著水準 $\alpha=0.01$，對命中率 0.6 進行假設檢定，求「不拒絕」創創自稱射擊命中率為 0.6 的最大 n 值為 __(C)__。

$\boxed{3}$

$H_0: p=0.6$ vs. $H_1: p\neq 0.6$

$X\sim Geo(p=0.6)$

$\sum_{k=1}^{n}0.4^{k-1}\cdot 0.6<1-0.01$

$\Rightarrow 1-0.4^n<1-0.01 \Rightarrow 0.4^n>0.01$

$0.4^5=0.01024>0.01$

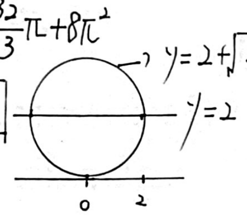
$0.4^6=0.004096<0.01$

$\Rightarrow 5$

4. 已知區域 R 滿足 $\begin{cases}x^2+(y-2)^2\le 4\\ y\ge 2\end{cases}$，將區域 R 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體體積為 __(D)__ (請以符號 π 表示答案)。

$\frac{32}{3}\pi+8\pi^2$

$\boxed{4}$



$$2\int_0^2\pi\left(\left(2+\sqrt{4-x^2}\right)^2-2^2\right)dx$$

$$=2\pi\left(\int_0^2\left(4\sqrt{4-x^2}+4-x^2\right)dx\right)=2\pi\left(4\cdot\frac{\pi\cdot 4}{4}+8-\frac{8}{3}\right)=\frac{32}{3}\pi+8\pi^2$$

16 5. 守守將 10 元存入一家銀行推出的高頻複利定存方案，該方案的年利率為 50%，並且每年分成 n 次計息。當計息次數 n 趨近無限大時，守守的這筆投資在一年後將趨近於某個金額 S。已知 $e\approx 2.71828$，請求出 S 的整數部分為 __(E)__ (請用正整數表示)。

$\boxed{5}$

$$10\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{n}\right)^n$$

$$=10\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}}\to 10\cdot e^{\frac{1}{2}}\doteqdot 16$$

	1. 6
1	2.71
1	1
2 $\boxed{6}$	1 71

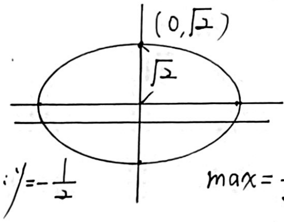
$\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ 6. 將橢圓 $\Gamma:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 在坐標平面上，以原點O為中心逆時針旋轉30°得到橢圓Γ'，試求Γ'上任意一點$P(x,y)$到直線$L:x-\sqrt{3}y=1$的距離最大值為__(F)__

$x'+iy'=(x+iy)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

$L': x'-\sqrt{3}y'=1 \leftrightarrow L$ $\Rightarrow$ x' ↓ y' ↓

$x'+iy' \xrightarrow{-\theta} x+iy$, $\theta=30^\circ$

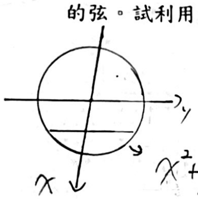
$\frac{1}{2}(\sqrt{3}x-y)-\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}(x+\sqrt{3}y)\right)=1 \Rightarrow L: y=-\frac{1}{2}$



$max=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$

#3个骰子 ↓

36 7. 一個戶外露營活動需要搭建一個特殊形狀的立體帳篷。將帳篷的底座平放在 xy 平面上，為圓形區域 $x^2+y^2\le 9$。已知帳篷內部每個垂直於 x 軸的截面，都是一個等腰直角三角形，且該三角形的斜邊恰好是底座圓上與 x 軸垂直的弦。試利用切片法，求出帳篷的內部體積為__(G)__。



$\rightarrow \triangle = y^2 = 9-x^2$

$2\int_0^3 (9-x^2)\,dx = 2\cdot\left(27-\frac{27}{3}\right) = 36$

2个骰子 点数和之个数 →

		1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8	9
3	4	5	6	7	8	9	10
4	5	6	7	8	9	10	11
5	6	7	8	9	10	11	12
6	7	8	9	10	11	12	13
5	8	9	10	11	12	13	14
4	9	10	11	12	13	14	15
3	10	11	12	13	14	15	16
2	11	12	13	14	15	16	17
1	12	13	14	15	16	17	18

其中 $\boxed{10}$

$\left(\frac{9}{5},\frac{3}{2},\frac{6}{5}\right)$ 8. 已知空間中三向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 所張的平行六面體體積為 60。若點 D 滿足 $\overrightarrow{OD}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，$x>0,\ y>0,\ z>0$，且四面體 $OABD$、$OACD$、$OBCD$ 的體積依序為 12, 15, 18，求$(x,y,z)=$__(H)__

$12=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{OA}\\\overrightarrow{OB}\\\overrightarrow{OD}\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\cdot z\cdot 60$ $\quad 15=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{OA}\\\overrightarrow{OC}\\\overrightarrow{OD}\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\cdot y\cdot 60$ $\quad 18=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{OB}\\\overrightarrow{OC}\\\overrightarrow{OD}\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\cdot x\cdot 60$

$\Rightarrow \left(\frac{9}{5},\frac{3}{2},\frac{6}{5}\right)$

$\frac{25}{8}$ 9. 設函數 $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$，且當$x>0$時，恆有 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n-1}\left(f\left(\frac{x^2}{n}\right)+f\left(\frac{2x^2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{nx^2}{n}\right)\right)=\frac{\sqrt[3]{7+x}}{x}$，求$f(1)=$__(I)__。

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3n}f\left(x^2\cdot\frac{k}{n}\right)$

$3x^2\cdot\frac{1}{3}\int_0^1 f(x^2t)\,dt=\frac{(x+7)^{\frac{1}{3}}}{x}\cdot 3x^2$

令 $u=x^2t$ $\Rightarrow du=x^2\,dt$, $0\le t\le 1$ $\Rightarrow 0\le u\le x^2$

$\Rightarrow \int_0^{x^2} f(u)\,du = 3x(x+7)^{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow f(x^2)\cdot 2x=3\left(x\cdot\frac{1}{3}(x+7)^{-\frac{2}{3}}+(x+7)^{\frac{1}{3}}\right)$

$\Rightarrow f(1)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+2\right)=\frac{25}{8}$

$\frac{7}{1296}$ 10. 擲一顆公正骰子 6 次，令出現的點數依序為隨機變數 X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6，試求 $X_1-X_2+X_3-X_4+X_5-X_6=10$ 的機率為__(J)__。

3个骰子 点数和 →

18	3	1	1
17	4	1+2	3
16	5	1+2+3	6
15	6	1+2+3+4	10
14	7	1+2+3+4+5	15
13	8	1+2+3+4+5+6	21
12	9	2+3+4+5+6+5	25
11	10	3+4+5+6+5+4	27

$(A+B+C)-(D+E+F)=10$

13	3	21×1
14	4	15×3
15	5	10×6
16	6	6×10
17	7	3×15
18	8	1×21

$\frac{126\times 2}{6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6}=\frac{7}{1296}$

-5 11. 設空間中三個向量如下：$\vec{a}=(2,1,k)$，$\vec{b}=(1,2,-2)$，$\vec{c}=(-2,2,1)$。若已知對於所有實數t,s，$\left|\vec{a}+t\vec{b}+s\vec{c}\right|$ 的最小值為5，求所有滿足條件的實數k值之總和為__(K)__。

$\begin{matrix}1 & 2 & -2 & 1 & 2 & -2\\ -2 & 2 & 1 & -2 & 2 & 1\end{matrix}$

$(6,3,6)\parallel(2,1,2)$

$\left((t-2s+2)^2+(2t+2s+1)^2+(-2t+s+k)^2\right)(2^2+1^2+2^2)\ge(2k+5)^2=25\cdot 9$

$2k+5=15$ or $-15 \Rightarrow k=5$ or $-10 \Rightarrow -5$