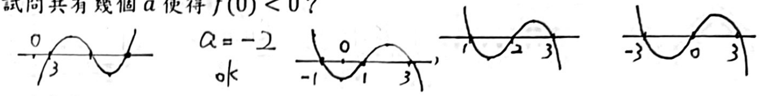
臺南市立沙崙國際高級中學高中部114學年度第1次教師甄選數學科試題卷

一、選擇題：5題(10%) 2025.11.30(日)～12.6(六) Ru

E 1. $a\in\{-3,-2,-1,1,2,3\}$，已知 a 為實係數三次多項式 $f(x)$ 的領導係數，若函數 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸交於三點，且其 x 坐標成首項為3、公差為 a 的等差數列。試問共有幾個 a 使得 $f(0)<0$？

(A)0 (B)1 (C)2 (D)3 (E)4

1 $a>0$ 皆 ok　$a=-2$ ok　$a=-1$　$a=-3$



D 2. 試求滿足 $\sin 18^\circ+\sin x^\circ=\cos 12^\circ$ 的最小正數 x 之值為？

(A)12 (B)22 (C)32 (D)42 (E)52

2 $\sin x^\circ=\sin 78^\circ-\sin 18^\circ=2\cos 48^\circ \sin 30^\circ=\sin 42^\circ \Rightarrow 42$

AC 3. 已知 $f(x)$ 為三次函數，下列何者正確

3 (A) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$　(B) max or min

$f''(x)=6ax+2b$ 在 $x=\frac{-b}{3a}$ 之兩側必变号

(C) $y=f'(x)$　$x=3$　$V(3,k)$

(A) 若 $f''(3)=0$，則 $x=3$ 處為反曲點。

(B) 若 $f(x)$ 在 $x=3$ 處為反曲點，則二次函數 $f'(x)$ 在 $x=3$ 處有最大值。

(C) 若 $f'(1)=f'(5)$，則 $x=3$ 處為反曲點。　(D) $f(x)=(x-1)^2(x-2)\Rightarrow f'(x)=(x-1)(3x-5)$

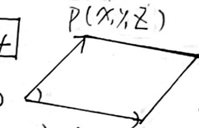
(D) 若方程式 $f'(x)=0$ 有兩相異實根，則方程式 $f(x)=0$ 有三相異實根。 (E) $f'(x)=3(x-1)^2$　当 $C=0$，3重根

(E) 若方程式 $f'(x)=0$ 有兩相等實根，則方程式 $f(x)=0$ 有重根。 $\Rightarrow f(x)=(x-1)^3+C$　当 $C\neq 0$，一实根

CE 4. 空間坐標中，有一直線 $L:\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{3}$，與一平面 $E:x-y-z=12$，已知平面 E 上有一點 P 滿足 $d(P,L)=3\sqrt{10}$，下列哪些選項可能是 P 坐標？

(A) $(12,0,0)$ (B) $(4,-4,-4)$ (C) $(0,-9,-3)$ (D) $(0,-3,-9)$ (E) $(8,1,-5)$

4 $P(x,y,z)$　$|\overrightarrow{OP}\times\vec{v}|=|\vec{v}|\cdot d(p,L)$



$\vec{v}=(2,-1,3)$

$\begin{matrix} x & y & z & x & y & z \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 & 3\end{matrix}$

滿足 $(3y+z)^2+(2z-3x)^2+(x+2z)^2=14\times 90=1260$　(C)(E) ok

CDE 5. 方陣 $A=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，若數列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 滿足 $A^n=a_nA+b_nI$，$n\in\mathbb{N}$，下列何者正確？

5 $\begin{vmatrix}-2-x & -1\\ 1 & -x\end{vmatrix}=(x+1)^2=0$，$a_n^2+2a_{n-1}+a_{n-2}=0$

(A) (A^2+A) 有反方陣　$\Rightarrow(A+I)^2=0$

(B) $\{a_{2n}\}$ 是等比數列

(C) $\{|b_n|\}$ 是等差數列

(D) $\{a_n-b_n\}$ 是等比數列

(E) $\{a_n^2-b_n^2\}$ 是等差數列

$A^1=1\cdot A+0\cdot I$

$A^2=-2\cdot A-1\cdot I$

$A^3=-2(-2A-1\cdot I)-A$

$\begin{cases} a_n=-2a_{n-1}+b_{n-1}\\ b_n=-a_{n-1}\end{cases}$

$a_n=(A+Bn)(-1)^n$

$a_1=(A+B)(-1)=1$

$a_2=(A+2B)=-2$

$B=-1$，$A=0$

$a_n=n(-1)^{n+1}$

$b_n=(n-1)(-1)^{n+1}$

(A) $|-A-I|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}=0$

二、非選題：10題(40%)

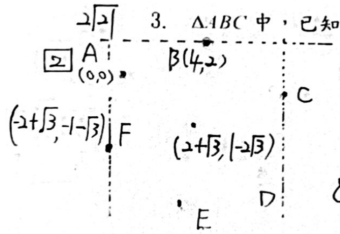
1 $1\le x,y\le 9$，$x+y\le 9\Rightarrow x'+y'+z=7$，$H^3_7=C^9_2\Rightarrow 36+9=45$　$\begin{cases}10\\20\\ \vdots\\90\end{cases}$

45 1. 我們定義「費氏數」：利用費氏數列的原理，先寫出兩個正二位數，然後從第三個數字開始，每位數都是前兩個數相加，直到不能寫為止。比如：$12\to 123\to 1235\to 12358$，$5+8=13$ 無法寫在一個位數了，所以12358就是一個費氏數。而58, 19就不是費氏數。請位總共有__________個「費氏數」。

$16+32\sqrt{3}$ 2. 正六邊形 $ABCDEF$ 被圍在以平行 x 軸與 y 軸為邊的矩形 $PQRS$ 內，其中 $A(0,0)$, $B(4,2)$ 且矩形 $PQRS$ 四邊各交此正六邊形於一點，求此矩形 $PQRS$ 的面積為____________。

$2\sqrt{21}$ 3. $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=60^\circ$，D 在 $\overline{AC}$ 上且滿足 $\overline{AD}:\overline{CD}=1:3$。若 $\triangle ABD$ 的外接圓直徑2，則 $\overline{AB}+\overline{AC}$ 的最大值為

2



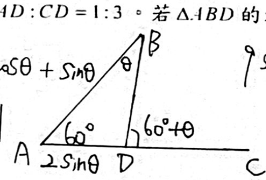
-60°：$(4+2i)(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$

-120°：$(4+2i)(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$

$8\cdot 2(1+2\sqrt{3})=16+32\sqrt{3}$

3

$\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta$



$9\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta\le\sqrt{84}=2\sqrt{21}$

$\boxed{4}$ 令 $A=\int_1^2 f(x)dx \Rightarrow A=(x^4+x^3-Ax^2+3x)\Big|_1^2 = 15+7-3A+3 \Rightarrow A=\frac{25}{4}$

$\frac{25}{4}$ 4. 已知多項式 $f(x)$ 滿足 $f(x)=4x^3+3x^2-2x[\int_1^2 f(x)dx]+3$，試求 $\int_1^2 f(x)dx$ 的值為＿＿＿＿＿＿。

675 5. 數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_1=\frac{1}{3}, \sum_{k=1}^{n} a_k a_{n-k+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+1}, n=1,2,\ldots,n$，則 $a_{2025}=$＿＿＿＿＿＿。

$\frac{5}{2}$ 6. $a\in\mathrm{R}$，當 $a\le x\le a+1$ 時，函數 $f(x)=|x^2-3x-4|+x+1$ 的最大值為 $M(a)$，則 $M(a)$ 的最小值為＿＿＿＿＿＿。

$\sqrt{122}$ 7. x,y 為實數，則 $\sqrt{(x-6)^2+(y-5)^2+(x+y-2)^2}+\sqrt{(x-8)^2+(y-2)^2+(x+y-1)^2}$ 最小值為＿＿＿＿＿＿。

$(5,-2)$ 8. $a,b\in\mathrm{Z}$，已知整係數多項函數 $f(x)$ 滿足 $f(2+\sqrt{3})=a-2\sqrt{3}$，且 $f(x+2)$ 除以 (x^2-3) 的餘式為 $(bx+5)$，則數對 $(a,b)=$＿＿＿＿＿＿。 $\boxed{8}$ $5+b\sqrt{3}=a-2\sqrt{3} \Rightarrow (5,-2)$

-250 9. 某店家辦理摸獎活動共有 100、200、300、400、500 元等五個獎項，花 100 元就可以摸獎一次。摸彩箱裡頭有 5 個紅球並分別標示獎項的金額、以及 15 個白球，一次取一球取後不放回，每一個球被取到的機會均等。小南想要一直玩到抽中所有獎項為止，則獲利的期望值為＿＿＿＿＿＿。

$(1,-2)$ 10. 設 $x\in\mathrm{R}$，$f(x)=1024^{\sin x}+1024^{\cos x}$，將函數的最小值用科學記號表示為 $a\times10^n$，其中 $1\le a<10$ 且 n 為整數。若 a 的整數部分為 m，則數對 $(m,n)=$＿＿＿＿＿＿

$\boxed{10}$ $2^{10S}+2^{10C}\ge 2\cdot 2^{5(S+C)}\ge 2^{1-5\sqrt{2}}$

$\log(2^{1-5\sqrt{2}}) \doteqdot (1-2\cdot1.414)\cdot0.301=-1.8207$

$=-2+0.1793 \doteqdot \log((1.\sim)\cdot10^{-2}) \Rightarrow m=1,\ n=-2$

$\boxed{9}$ $V\,R\,V\,R\,V\,R\,V\,R\,V\,R$ $\quad \frac{5}{2}=\frac{15}{6}$

$1500-(20-\frac{15}{2})\times100=-250$

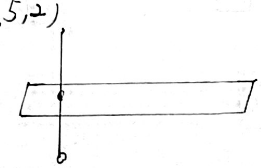
$\boxed{7}$ 令 $z=x+y$

$B(8,2,1)$

$A(6,5,2)$

$(6+5-2)(8+2-1)>0$

AB 同側



$E: x+y-z=0$

$V=\frac{6+5-2}{3}=3$

$A'(0,-1,8)$

$6-2\cdot3\cdot1 \quad 5-2\cdot3\cdot1 \quad 2-2\cdot3(-1)$

$\overline{A'B}=\sqrt{64+9+49}=\sqrt{122}$

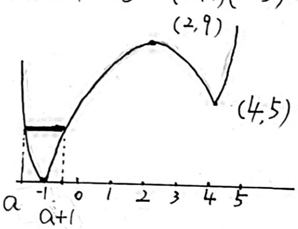
$\boxed{6}$ $x^2-3x-4=(x+1)(x-4)$

$x\ge4$ or $x\le-1$

$y=x^2-2x-3=(x+1)(x-3) \Rightarrow V(1,-4)$

$-1\le x\le4$

$y=-x^2+4x+5=-(x+1)(x-5) \Rightarrow V(2,9)$



$(1,-4)$

$x<-1 \qquad -1\le x\le4$

$M(a) = M(a+1)$

$a^2-2a-3=-(a+1)^2+4(a+1)+5$

$=-a^2+2a+8$

$\Rightarrow 2a^2-4a-11=0$

$\Rightarrow a=1+\frac{\sqrt{26}}{2}$

$\Rightarrow (a-1)^2=a^2-2a+1-4=\frac{13}{2}-4=\frac{5}{2}$

-4

$\min = a^2-2a-3=\frac{5}{2}$ #

$\boxed{5}$ $a_1a_n+a_2a_{n-1}+\cdots+a_na_1=\frac{1}{2}(a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1})$

注意到 $a_n=\frac{n}{3} \Rightarrow \frac{2}{9}\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1)=\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)+\frac{n}{3}a_{n+1}$

$\Rightarrow \frac{1}{9}\cdot\left(2\left(\frac{3}{3}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)(n+1)-\frac{1}{6}n\cdot(n+1)(2n+1)\right)-\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)\right)$

$=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{6}\cdot n(n+1)\cdot6=\frac{n}{3}\cdot a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1}=\frac{n+1}{3}$ (M.I.)

$\Rightarrow \frac{2025}{3}=675$