

7、已知 $f(x)=3\sin x+4\cos x$ ，若 α, β 為銳角且 $f(\alpha)=2, f(\beta)=1$ ，則 $\sin(\alpha-\beta)=$ _____。

$$\text{由 } \begin{cases} 3\sin \alpha + 4\cos \alpha = 2 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} \sin \alpha = \frac{6 \pm 4\sqrt{21}}{25} \\ \cos \alpha = \frac{8 \pm 3\sqrt{21}}{25} \end{cases} \quad \text{由 } \begin{cases} 3\sin \beta + 4\cos \beta = 1 \\ \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} \sin \beta = \frac{3 \pm 8\sqrt{6}}{25} \\ \cos \beta = \frac{4 \pm 6\sqrt{6}}{25} \end{cases}$$

$$\text{因為 } \alpha, \beta \text{ 為銳角，所以 } 3\sin \alpha + 4\cos \alpha = 3 \times \frac{6+4\sqrt{21}}{25} + 4 \times \frac{8+3\sqrt{21}}{25} = \frac{50+24\sqrt{21}}{25}$$

(不合，因為 $3\sin \alpha + 4\cos \alpha = 2$ ，故題目有誤)

若要符合 $3\sin \alpha + 4\cos \alpha = 2$ ，則 $(\sin \alpha, \cos \alpha) = (+, -)$ or $(-, +)$ 。

故 α, β 需皆為第二象限角 or 皆為第四象限角 or 一個第二一個第四 or 一個第四一個第二。

$$\text{已知 } \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{6 \pm 4\sqrt{21}}{25} \times \frac{4 \pm 6\sqrt{6}}{25} - \frac{8 \pm 3\sqrt{21}}{25} \times \frac{3 \pm 8\sqrt{6}}{25}$$

(i) 若 α, β 皆為第二象限角，則 $\sin(\alpha - \beta)$ 的分子為

$$\begin{aligned} & (6+4\sqrt{21})(4-6\sqrt{6}) - (8-3\sqrt{21})(3+8\sqrt{6}) \\ &= (24-36\sqrt{6}+16\sqrt{21}-24\sqrt{126}) - (24+64\sqrt{6}-9\sqrt{21}-24\sqrt{126}) \\ &= -100\sqrt{6}+25\sqrt{21} \end{aligned}$$

(ii) 若 α, β 皆為第四象限角，則 $\sin(\alpha - \beta)$ 的分子為

$$\begin{aligned} & (6-4\sqrt{21})(4+6\sqrt{6}) - (8+3\sqrt{21})(3-8\sqrt{6}) \\ &= (24+36\sqrt{6}-16\sqrt{21}-24\sqrt{126}) - (24-64\sqrt{6}+9\sqrt{21}-24\sqrt{126}) \\ &= 100\sqrt{6}-25\sqrt{21} \end{aligned}$$

(iii) 若 α 為第二象限角, β 為第四象限角，則 $\sin(\alpha - \beta)$ 的分子為

$$\begin{aligned} & (6+4\sqrt{21})(4+6\sqrt{6}) - (8-3\sqrt{21})(3-8\sqrt{6}) \\ &= (24+36\sqrt{6}+16\sqrt{21}+24\sqrt{126}) - (24-64\sqrt{6}-9\sqrt{21}+24\sqrt{126}) \\ &= 100\sqrt{6}+25\sqrt{21} \end{aligned}$$

(iv) 若 α 為第四象限角, β 為第二象限角，則 $\sin(\alpha - \beta)$ 的分子為

$$\begin{aligned} & (6-4\sqrt{21})(4-6\sqrt{6}) - (8+3\sqrt{21})(3+8\sqrt{6}) \\ &= (24-36\sqrt{6}-16\sqrt{21}+24\sqrt{126}) - (24+64\sqrt{6}+9\sqrt{21}+24\sqrt{126}) \\ &= -100\sqrt{6}-25\sqrt{21} \end{aligned}$$

故題目需修正為「 α, β 皆為第四象限角」，才能得到 $\sin(\alpha - \beta) = \frac{100\sqrt{6}-25\sqrt{21}}{625} = \frac{4\sqrt{6}-\sqrt{21}}{25}$ 。

7、已知 $f(x)=3\sin x+4\cos x$ ，若 α, β 為銳角且 $f(\alpha)=2, f(\beta)=1$ ，則 $\sin(\alpha-\beta)=$ _____。

若題目修正為「 α, β 皆為第四象限角」，則解法如下：

整理 $f(x)=5(\sin x \cdot \frac{3}{5} + \cos x \cdot \frac{4}{5})=5\sin(x+k)$ ，其中 $\cos k = \frac{3}{5}$ ， $\sin k = \frac{4}{5}$

$$\begin{cases} f(\alpha)=5\sin(\alpha+k)=2 \\ f(\beta)=5\sin(\beta+k)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(\alpha+k)=\frac{2}{5} \\ \sin(\beta+k)=\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(\alpha+k)=\pm\frac{\sqrt{21}}{5} \\ \cos(\beta+k)=\pm\frac{2\sqrt{6}}{5} \end{cases}$$

因為 $-90^\circ < \alpha, \beta < 0^\circ$ 且 $0^\circ < k < 90^\circ$ ，

所以 $-90^\circ < \alpha+k < 90^\circ$ ， $-90^\circ < \beta+k < 90^\circ$ ，得 $\cos(\alpha+k)=\frac{\sqrt{21}}{5}$ ， $\cos(\beta+k)=\frac{2\sqrt{6}}{5}$ 。

故

$$\begin{aligned} \sin(\alpha-\beta) &= \sin((\alpha+k)-(\beta+k)) \\ &= \sin(\alpha+k)\cos(\beta+k)-\cos(\alpha+k)\sin(\beta+k) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{2\sqrt{6}}{5} - \frac{\sqrt{21}}{5} \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{4\sqrt{6}-\sqrt{21}}{25} \end{aligned}$$