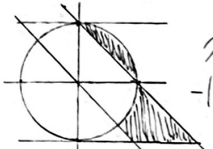


一、選填題 (每題 5 分, 共 80 分。填在答案卡上, 須以最簡分數、最簡根式作答, 否則不予計分)

A. 設 $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$, 且 $x \neq 0$ 。若 $f(a) = 4$, $f(b) = 3$, 則 $f(a+b) = \frac{\textcircled{1}\textcircled{2}}{\textcircled{3}}$ 。

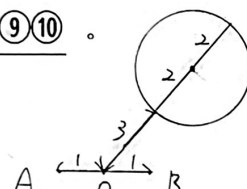
[A] $y = \frac{4^x + 1}{4^x - 1}$
 $\Rightarrow 4^x = \frac{y+1}{y-1} \Rightarrow 4^{a+b} = \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{2} = \frac{10}{3}$
 $\frac{\frac{10}{3} + 1}{\frac{10}{3} - 1} = \frac{13}{7}$

B. 在坐標平面上, 不等式 $\log_{(x+y)} x < \log_{(x+y)} \sqrt{1-y^2}$ 的解所構成區域的面積為 $\frac{\textcircled{4}}{\textcircled{5}} + \frac{\textcircled{6}}{\textcircled{7}} \pi$ 。

[B] 
 $x > 0 \quad x+y > 1: x^2 + y^2 < 1 \quad \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$
 $-1 < y < 1 \quad 0 < x+y < 1: x^2 + y^2 > 1 \quad + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$
 $= \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}$

C. 已知 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, 若 P 點為圓 $C: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$ 上一點, 設 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 的最小值為 m ,

最大值為 M , 則 $M+m = \frac{\textcircled{8}\textcircled{9}\textcircled{10}}{\textcircled{11}}$ 。

[C] 
 $\Rightarrow 2(\overline{PO}^2 + 1)$
 $\Rightarrow 2(9 + 49) + 4 = 120$

D. 設 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的對邊分別為 a 、 b 、 c , 若 $a^2 + b^2 = 8c^2$, 則 $\frac{\tan C}{\tan A} + \frac{\tan C}{\tan B}$ 之值為 $\frac{\textcircled{11}}{\textcircled{12}}$ 。

[D] $\frac{\sin C}{\cos C} \left(\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B} \right) = \frac{2ab}{a^2 + b^2 - c^2} \cdot \frac{c^2}{ab} = \frac{2}{7}$

E. 若 α, β, γ 為 $x^3 - 4x - 2 = 0$ 的三根, 則 $\alpha^6 + \beta^6 + \gamma^6 = \frac{\textcircled{13}\textcircled{14}\textcircled{15}}{\textcircled{16}}$ 。

[E] $A_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$
 $A_0 = 3, A_1 = 0, A_2 = -4, A_3 = 6, A_4 = 32, A_5 = 4 \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 40, A_6 = 4 \cdot 32 + 2 \cdot 6 = 140$
 $A_1 = 0 = 0, A_4 = 32 = 32, A_5 = 40 = 40$

送分 F. 設多項式 $f(x)$ 的次數為 23, 若 $f(k) = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, 3, \dots, 23$, 則 $f(-2) = \frac{\textcircled{16}\textcircled{17}\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ 。

G. 設空間中兩直線 $L_1: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = z+3$ 與 $L_2: \frac{x+1}{4} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z+2}{-1}$, 已知直線 L 過點 $P(1, 2, -1)$, 且與 L_1 、 L_2 分

別交於 A 、 B 兩點, 則 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\textcircled{20}}{\textcircled{21}}$ 。

[G] $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & -1 & 4 & -2 \\ -1 & 6 & -16 \end{pmatrix}$

$E_1: x - 6y + 16z = -42$
 $E_2: x - 6y + 16z = -9$

$\frac{d(P, E_1)}{d(P, E_2)} = \frac{|-27 + 42|}{|-27 + 9|} = \frac{5}{6}$

H. 在坐標空間中四面體 $P-ABC$ ，已知 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$ ，且 $A(4,-1,0)$ ， $B(2,1,2)$ ， $C(0,1,4)$ ， P 點在平面 ABC 的正射影點為 Q ，則 Q 點的坐標為 (22, 23, 24, 25)。

[H]
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x-z = -2 \\ x-y-z = -2 \end{cases} \Rightarrow (1, -4, 3)$$

$$E_{ABC}: x+z=4$$

I. 設一拋物線的頂點坐標為 $V(-1, 3)$ ，且對稱軸的方程式為 $L: 2x+y-1=0$ 。若此拋物線通過點 $A(3, 3)$ ，試求此拋

物線的正焦弦長為 $\frac{16\sqrt{5}}{5}$ (26, 27, 28, 29)

[I] $(-1, 3) \rightarrow (0, 0)$
 $(3, 3) \rightarrow (4, 0)$

$$(4+0i)(\frac{2}{15}+i(\frac{-1}{15})) = \frac{1}{15}(8-4i) \Rightarrow C=4$$

$$(C-4)^2+64=(C+4)^2 \Rightarrow 4C \cdot \frac{1}{15} = \frac{16}{15} \Rightarrow C=4$$

J. 如圖， $\triangle ABC$ 內部有一點 P ， \overline{DE} 、 \overline{FG} 、 \overline{HI} 都過 P 點，長度都是 d ，且分別平行於 \overline{BC} 、 \overline{CA} 、 \overline{AB} 。若 $\overline{AB}=380$ 、 $\overline{BC}=520$ 、 $\overline{CA}=494$ ，求

$d = \frac{30 \cdot 31 \cdot 32}{494} = \frac{d}{494} = \frac{x+y}{x+y+z} \Rightarrow d(\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 19} + \frac{1}{8 \cdot 5 \cdot 13} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 19}) = 2$
 $\frac{d}{520} = \frac{y+z}{x+y+z} \Rightarrow d(\frac{20+19+26}{8 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19}) = 2 \Rightarrow d = 8 \cdot 19 \cdot 2 = 304$

K. 已知 P, Q, R 為橢圓 $4x^2+y^2=72$ 上的三個相異點，若 P 點坐標為 $(-3, 6)$ ，則當 $\triangle PQR$ 有最大面積時，

此時的 \overline{QR} 長為 $3\sqrt{3}$ (33, 34, 35) 正 $\Delta = e^{i(\pm \frac{2\pi}{3})}$

[K] $(2x)^2 + (y)^2 = (6\sqrt{2})^2$
 $x' = 2x$
 $y' = y \Rightarrow P(-6, 6)$
 $Q(\frac{3+3\sqrt{3}}{2}, -3+3\sqrt{3})$
 $R(\frac{3-3\sqrt{3}}{2}, -3-3\sqrt{3})$
 $|\overline{QR}| = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{1+1} = 3\sqrt{15}$

L. 從方程式 $x^{20}=18-10\sqrt{7}i$ 的所有複數根中，任取相異兩根令為 α, β ，則 $|\alpha-\beta| < \sqrt{1+2\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ 的機率為

$\frac{8}{19}$ (36, 37, 38)

[L] $|z|^{20} = \sqrt{324+700} = 2^5$
 $|z| = 2^{\frac{1}{4}}$
 $\cos \frac{1}{5}\pi = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} < \cos \frac{1}{4}\pi$
 $\frac{C_{19}^{20} C_1^4}{C_{19}^{20}} = \frac{8}{19}$

M. 坐標平面上，圓 $C: x^2+y^2-6y+1=0$ ，二次函數 $y=f(x)=kx^2$ 的圖形與圓 C 分別在第一象限、第二象限各相切於 P, Q 兩點。若圓 C 的下半圓弧與 $y=f(x)$ 的上方所圍成的封閉區域為 R ，則將 R 繞 x 軸旋轉所形成的

旋轉體體積為 $a\pi^2+b\pi+c$ 立方單位，試求 $3a+b+c = \frac{39 \cdot 40}{41 \cdot 42}$

$$2\pi \int_0^{\sqrt{3}} ((3-\sqrt{8-x^2})^2 - (\frac{1}{4}x^2)^2) dx = \frac{2\pi}{15} \int_0^{\sqrt{3}} (17-x^2-\frac{1}{16}x^4-6\sqrt{8-x^2}) dx = \frac{2\pi}{15} (-18+\frac{284}{15}) = \frac{2\pi}{15}$$

N. 正整數 a, b, c 滿足 $abc=2a+2b+2c$ ，求有序組 (a, b, c) 共有 (43, 44) 種可能。

[N] $a=1$
 $6=(b-2)(c-2)$
 $a=2$
 $3=(b-1)(c-1)$
 $a=3$
 $2=(b-1)(c-1)$
 $a=4$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=5$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=6$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=7$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=8$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=9$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=10$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=11$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=12$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=13$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=14$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=15$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=16$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=17$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=18$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=19$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=20$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=21$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=22$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=23$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=24$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=25$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=26$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=27$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=28$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=29$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=30$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=31$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=32$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=33$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=34$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=35$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=36$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=37$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=38$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=39$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=40$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=41$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=42$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=43$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=44$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=45$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=46$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=47$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=48$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=49$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=50$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=51$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=52$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=53$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=54$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=55$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=56$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=57$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=58$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=59$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=60$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=61$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=62$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=63$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=64$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=65$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=66$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=67$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=68$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=69$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=70$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=71$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=72$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=73$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=74$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=75$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=76$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=77$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=78$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=79$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=80$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=81$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=82$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=83$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=84$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=85$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=86$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=87$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=88$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=89$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=90$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=91$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=92$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=93$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=94$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=95$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=96$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=97$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=98$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=99$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=100$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=101$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=102$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=103$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=104$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=105$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=106$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=107$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=108$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=109$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=110$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=111$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=112$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=113$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=114$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=115$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=116$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=117$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=118$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=119$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=120$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=121$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=122$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=123$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=124$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=125$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=126$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=127$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=128$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=129$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=130$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=131$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=132$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=133$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=134$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=135$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=136$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=137$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=138$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=139$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=140$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=141$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=142$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=143$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=144$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=145$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=146$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=147$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=148$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=149$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=150$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=151$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=152$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=153$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=154$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=155$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=156$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=157$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=158$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=159$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=160$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=161$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=162$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=163$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=164$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=165$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=166$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=167$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=168$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=169$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=170$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=171$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=172$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=173$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=174$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=175$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=176$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=177$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=178$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=179$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=180$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=181$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=182$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=183$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=184$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=185$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=186$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=187$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=188$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=189$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=190$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=191$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=192$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=193$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=194$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=195$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=196$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=197$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=198$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=199$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=200$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=201$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=202$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=203$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=204$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=205$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=206$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=207$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=208$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=209$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=210$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=211$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=212$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=213$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=214$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=215$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=216$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=217$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=218$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=219$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=220$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=221$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=222$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=223$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=224$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=225$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=226$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=227$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=228$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=229$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=230$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=231$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=232$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=233$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=234$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=235$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=236$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=237$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=238$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=239$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=240$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=241$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=242$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=243$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=244$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=245$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=246$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=247$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=248$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=249$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=250$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=251$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=252$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=253$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=254$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=255$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=256$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=257$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=258$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=259$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=260$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=261$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=262$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=263$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=264$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=265$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=266$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=267$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=268$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=269$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=270$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=271$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=272$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=273$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=274$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=275$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=276$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=277$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=278$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=279$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=280$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=281$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=282$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=283$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=284$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=285$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=286$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=287$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=288$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=289$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=290$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=291$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=292$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=293$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=294$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=295$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=296$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=297$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=298$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=299$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=300$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=301$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=302$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=303$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=304$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=305$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=306$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=307$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=308$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=309$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=310$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=311$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=312$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=313$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=314$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=315$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=316$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=317$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=318$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=319$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=320$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=321$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=322$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=323$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=324$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=325$
 $1=(b-1)(c-1)$
 $a=326</$

先備：易証

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \quad \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \dots$$

48 O. 化簡 $\frac{1 \times 2 \times 20 \times 21 + 2 \times 3 \times 19 \times 20 + 3 \times 4 \times 18 \times 19 + \dots + 20 \times 21 \times 1 \times 2}{1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + 21 \times 22} = \textcircled{45} \textcircled{46}$ 。

Q $\sum_{k=1}^{20} k(k+1)(k-21)(k-22) \rightarrow (k+2-23)(k+2+1-25) = \frac{20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24}{5} - 48 \cdot \frac{20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23}{4} + \frac{23 \cdot 24 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22}{3} = (96 - 240 + 160) \cdot 3 = 48$

注：P. 數列 $\{x_n\}$ 滿足 $x_1 = \frac{1}{20}$, $x_{k+1} = \frac{1}{3}x_k^2 + x_k$, 求 $\frac{1}{x_1+3} + \frac{1}{x_2+3} + \dots + \frac{1}{x_{2025}+3}$ 的整數部分為 $\textcircled{47} \textcircled{48}$ 。

$3x_{k+1} = x_k(x_k+3) \Rightarrow \frac{1}{x_k+3} = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}} \Rightarrow \frac{1}{x_1} - \left(\frac{1}{x_{2026}}\right) \in (0,1) \Rightarrow 19$

二．非選題（共 20 分。請用黑色或藍色原子筆寫在作答卷上，須詳述過程，否則酌予扣分）

1. 求證： $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ，除了利用課本介紹「數學歸納法」的證明之外，請再給出三種不同於

「數學歸納法」的證明。（完整給出第一種證法得 4 分，完整給第二、三種證法再各得 3 分）

Q $2(C_2^1 C_2^1 + C_2^3 C_2^{20} + \dots + C_2^{21} C_2^2) / C_2^2 + \dots + C_2^{21}$

法2

王重鈞

老師提供

#36

$\frac{2 \cdot C_2^{24}}{C_2^{23}} = 2 \cdot \frac{24 \cdot 20}{5 \cdot 4} = 48$

2. 有一道數學問題：

試求極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{n+1}{n}) + (\frac{n+1}{n})^2 + \dots + (\frac{n+1}{n})^n}{n} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

小藍的解法如下： $\textcircled{2} \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{n+1}{n}((1+\frac{1}{n})^n - 1)}{\frac{1}{n}} = (1+\frac{1}{n})((1+\frac{1}{n})^n - 1) \rightarrow e - 1$