國立台灣師範大學
附屬 高 級 中 學　114 學年度 第 2 次　專任教師甄選數學科筆試　【題目卷】

2025.11.15(六) ~ 11/22(六)

一． **選填題**（每題 5 分，共 80 分。填在<u>答案卡</u>上，須以**最簡**分數、**最簡根式**作答，否則不予計分）

A. 設 $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}$，且 $x\neq 0$。若 $f(a)=4$，$f(b)=3$，則 $f(a+b)=\dfrac{①②}{③}$。

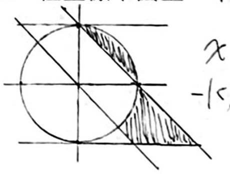
A

$y=\dfrac{4^x+1}{4^x-1}$

$\Rightarrow 4^x=\dfrac{y+1}{y-1} \Rightarrow 4^{a+b}=\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{4}{2}=\dfrac{10}{3}$　　$\dfrac{\frac{10}{3}+1}{\frac{10}{3}-1}=\dfrac{13}{7}$

B. 在坐標平面上，不等式 $\log_{(x+y)}x<\log_{(x+y)}\sqrt{1-y^2}$ 的解所構成區域的面積爲 $\dfrac{④}{⑤}+\dfrac{⑥}{⑦}\pi$。

B



$x>0$
$-1<y<1$

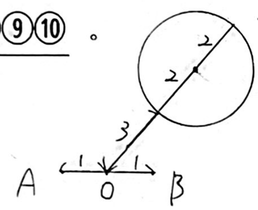
$x+y>1$: $x^2+y^2<1$
$0<x+y<1$: $x^2+y^2>1$

$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$
$+1-\dfrac{\pi}{8}$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{8}$

C. 已知 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，若 P 點爲圓 C：$(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 上一點，設 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 的最小值爲 m，最大值爲 M，則 $M+m=$ ⑧⑨⑩。

C



$2(\overline{PO}^2+1)$

$\Rightarrow 2(9+49)+4=120$

D. 設 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊分別爲 a、b、c，若 $a^2+b^2=8c^2$，則 $\dfrac{\tan C}{\tan A}+\dfrac{\tan C}{\tan B}$ 之值爲 $\dfrac{⑪}{⑫}$。

D

$\dfrac{\sin C}{\cos C}\left(\dfrac{\cos A}{\sin A}+\dfrac{\cos B}{\sin B}\right)=\dfrac{2ab}{a^2+b^2-c^2}\cdot\dfrac{c^2}{ab}=\dfrac{2}{7}$

E. 若 α,β,γ 爲 $x^3-4x-2=0$ 的三根，則 $\alpha^6+\beta^6+\gamma^6=$ ⑬⑭⑮。

E

令 $A_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$　　$A_{n+3}=4A_{n+1}+2A_n$

$A_0=3$　$A_2=0-2(-4)$　$A_3=6$　$A_5=4\cdot 6+2\cdot 8$　$A_6=4\cdot 32+2\cdot 6=140$

$A_1=0$　$=8$　$A_4=32$　$=40$

送分

F. 設多項式 $f(x)$ 的次數爲 23，若 $f(k)=\dfrac{1}{k}$，$k=1,2,3,\ldots,23$，則 $f(-2)=\dfrac{⑯⑰⑱}{⑲}$。

G. 設空間中兩直線 L_1：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{3}=z+3$ 與 L_2：$\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z+2}{-1}$，已知直線 L 過點 $P(1,2,-1)$，且與 L_1、L_2 分別交於 A、B 兩點，則 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\dfrac{⑳}{㉑}$。

E_1: $x-6y+16z=-42$

E_2: $x-6y+16z=-9$

$\dfrac{d(P,E_1)}{d(P,E_2)}=\dfrac{|-27+42|}{|-27+9|}=\dfrac{5}{6}$

G

$\begin{array}{c|cccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 4 & -2 & -1 \\ & -1 & 6 & -16 & & \end{array}$

H. 在坐標空間中四面體 $P-ABC$，已知 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$，且 $A(4,-1,0)$，$B(2,1,2)$，$C(0,1,4)$，P 點在平面 ABC 的正射影點為 Q，則 Q 點的坐標為 (㉒,㉓㉔,㉕)。

$\boxed{H}$

$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ & -1 & 0 & -1 & & \end{matrix}$ $\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{AB}$

$\begin{cases} x-z=-2 \ (過(1,1,3)) \\ x-y-z=2 \quad (3,0,1) \end{cases} \Rightarrow (1,-4,3)$

$E_{ABC}: x+z=4$

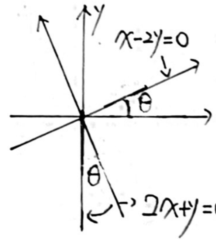
I. 設一拋物線的頂點坐標為 $V(-1,3)$，且對稱軸的方程式為 $L: 2x+y-1=0$。若此拋物線通過點 $A(3,3)$，試求此拋物線的正焦弦長為 $\dfrac{㉖㉗\sqrt{㉘}}{㉙}$

$\dfrac{16\sqrt{5}}{5}$

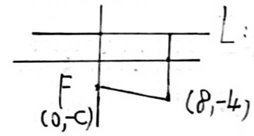
$\boxed{I}$

$(-1,3) \to (0,0)$

$(3,3) \quad\ (4,0)$



順時針轉θ



$(4+0i)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}+i\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}(8-4i)$

$(c-4)^2+64=(c+4)^2$

$\Rightarrow c=4$

$4c\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{16}{\sqrt{5}}$ #

J. 如圖，$\triangle ABC$ 內部有一點 P，$\overline{DE}$、$\overline{FG}$、$\overline{HI}$ 都過 P 點，長度都是 d，且分別平行於 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$。若 $\overline{AB}=380$、$\overline{BC}=520$、$\overline{CA}=494$，求 $d=$ ㉚㉛㉜

304

$\boxed{J}$

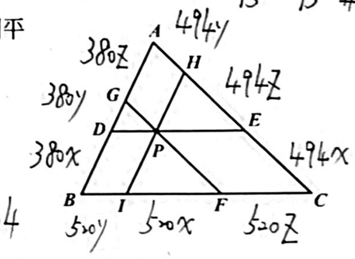
$\frac{d}{494}=\frac{x+y}{x+y+z}$

$\frac{d}{520}=\frac{y+z}{x+y+z}$

$\frac{d}{380}=\frac{z+x}{x+y+z}$

$\Rightarrow d\left(\frac{1}{2\cdot13\cdot19}+\frac{1}{8\cdot5\cdot13}+\frac{1}{4\cdot5\cdot19}\right)=2$

$\Rightarrow d\left(\frac{20+19+26}{8\cdot5\cdot13\cdot19}\right)=2 \Rightarrow d=8\cdot19\cdot2=304$



K. 已知 P、Q、R 為橢圓 $4x^2+y^2=72$ 上的三個相異點，若 P 點坐標為 $(-3,6)$，則當 $\triangle PQR$ 有最大面積時，此時的 $\overline{QR}$ 長為 ㉝$\sqrt{㉞㉟}$

$3\sqrt{15}$

$\boxed{k}$

$(2x)^2+(y)^2=(6\sqrt{2})^2$

$x'=2x$

$y'=y \Rightarrow P(-6,6)$

正$\triangle \Rightarrow e^{i(\pm\frac{2\pi}{3})}$

$6(-1+i)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ $\underline{x=\frac{x'}{2}}$ $R\left(\frac{3-3\sqrt{3}}{2},-3-3\sqrt{3}\right)$

$6(-1+i)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ $Q\left(\frac{3+3\sqrt{3}}{2},-3+3\sqrt{3}\right)$

$|\overline{QR}|=3\sqrt{3}|(1,2)|=3\sqrt{15}$

L. 從方程式 $x^{20}=18-10\sqrt{7}i$ 的所有複數根中，任取相異兩根令為 α、β，則 $|\alpha-\beta|<\sqrt{1+2\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ 的機率為 $\dfrac{㊱}{㊲㊳}$

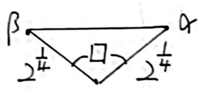
$\frac{8}{19}$

$\boxed{L}$ thepiano

$|z|^{20}=\sqrt{324+700}=2^5$

$r=|z|=2^{\frac{1}{4}}$

$\frac{360°}{20}=18°$



$(|\alpha-\beta|)^2=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\cos\square<2\sqrt{2}+1-\sqrt{3}$

$\Rightarrow \cos75°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}<\cos\square \Leftarrow 72°$

$18°\times4=72°$

$\frac{C^{20}_1C^4_1}{C^{20}_2}=\frac{8}{19}$

M. 坐標平面上，圓 $C: x^2+y^2-6y+1=0$，二次函數 $y=f(x)=kx^2$ 的圖形與圓 C 分別在第一象限、第二象限各相切於 P、Q 兩點。若圓 C 的下半圓弧與 $y=f(x)$ 的上方所圍成的封閉區域為 R，則將 R 繞 x 軸旋轉所形成的旋轉體體積為 $a\pi^2+b\pi+c$ 立方單位，試求 $3a+b+c=\dfrac{㊴㊵}{㊶㊷}$

$\frac{28}{15}$

$\boxed{M}$

$x^2=\frac{1}{k}y$

$y^2+\left(\frac{1}{k}-6\right)y+1=0$

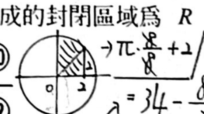
$D=0 \Rightarrow \frac{1}{k^2}-12\cdot\frac{1}{k}+32=0$

$\frac{1}{k}=8: y^2+2y+1=0$ 不合

$\frac{1}{k}=4: y^2-2y+1=0 \Rightarrow y=1,\ x=\pm2$

$2\pi\int_0^2\left[\left(3-\sqrt{8-x^2}\right)^2-\left(\frac{1}{4}x^2\right)^2\right]dx$

$\Rightarrow \int_0^2\left(17-x^2-\frac{1}{16}x^4-6\sqrt{8-x^2}\right)dx$



$=34-\frac{8}{3}-\frac{32}{16\cdot5}-6\pi-12$

$=22-\frac{46}{15}-6\pi$

$\Rightarrow -6\pi^2+\frac{284}{15}\pi$

$\Rightarrow \left(-18+\frac{284}{15}\right)\cdot2=\frac{28}{15}$

N. 正整數 a，b，c 滿足 $abc=2a+2b+2c$，求有序組 (a,b,c) 共有 ㊸㊹ 種可能。

15 設 $a\le b\le c$

$\boxed{N}$ $\Rightarrow 6a\le abc\le 6c$

$\Rightarrow \begin{cases} ab\le6 \\ bc\ge6 \end{cases}$

a	b
1	1
	5
	6
2	1
	5
	3

$a=1$

$6=(b-2)(c-2)$

b	c
3	8
4	5

$a=2$

$3=(b-1)(c-1)$

b	c
2	4

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 1 & 3 & 8 & 3! \\ 1 & 4 & 5 & 3! \\ 2 & 2 & 4 & \frac{3!}{2!} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 15$

先備：易証

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$，$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ …

48 **O.** 化簡 $\frac{1\times2\times20\times21+2\times3\times19\times20+3\times4\times18\times19+\cdots+20\times21\times1\times2}{1\times2+2\times3+\cdots+21\times22}=$ ㊺㊻ 。

$\boxed{O}$ $\sum_{k=1}^{20} k(k+1)\underline{(k-21)(k-22)} \to (k+2-23)(k+2+1)-25)$

$a_k = k(k+1)(k+2)(k+3) - 48k(k+1)(k+2) + 23\cdot24k(k+1)$

$\frac{\frac{20\cdot21\cdot22\cdot23\cdot24}{5}-48\cdot\frac{20\cdot21\cdot22\cdot23}{4}+\frac{23\cdot24\cdot20\cdot21\cdot22}{3}}{\frac{21\cdot22\cdot23}{3}} = (96-240+160)\cdot3$

$= 48$ #

法1：

19 **P.** 數列 $\langle x_n\rangle$ 滿足 $x_1=\frac{1}{20}$，$x_{k+1}=\frac{1}{3}x_k^2+x_k$，求 $\frac{1}{x_1+3}+\frac{1}{x_2+3}+\cdots+\frac{1}{x_{2025}+3}$ 的整數部分爲 ㊼㊽ 。

$\boxed{P}$ $3x_{k+1}=x_k(x_k+3)$ $\Rightarrow \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x_{k+1}}=\left(\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_k+3}\right)\cdot\frac{1}{3}$ $\Rightarrow \frac{1}{x_k+3}=\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_{k+1}}$ $\Rightarrow \frac{1}{x_1}-\left(\frac{1}{x_{2026}}\right)^{\in(0,1)}$ $\Rightarrow 19$

二、 **非選題**（共 20 分。請用<u>黑色</u>或<u>藍色</u>原子筆寫在<u>作答卷</u>上，須詳述過程，否則酌予扣分）

1. 求證：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，除了利用課本介紹「數學歸納法」的證明之外，請再給出三種不同於「數學歸納法」的證明。（完整給出第一種證法得 4 分，完整給第二、三種證法再各得 3 分）

$\boxed{O}$ $2(C^2_2C^{21}_2+C^3_2C^{20}_2+\cdots+C^{21}_2C^2_2)/C^2_2+\cdots+C^{21}_2$ $\to C^{24}_5$

法2 王重鈞老師提供

#3大

3	$C^2_2C^{21}_2$	
4	$C^3_2C^{20}_2$	
⋮	⋮	
22	$C^{21}_2C^2_2$	

$\frac{2\cdot C^{24}_5}{C^{23}_3}=2\cdot\frac{24\cdot20}{5\cdot4}$

$=48$

2. 有一道數學問題：

試求極限值 $\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{n+1}{n})+(\frac{n+1}{n})^2+\cdots+(\frac{n+1}{n})^n}{n}=$ ＿＿＿＿ 。

<u>小藍</u>的解法如下：

$\boxed{2}$ $\frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{n+1}{n}\left((1+\frac{1}{n})^n-1\right)}{\frac{1}{n}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left((1+\frac{1}{n})^n-1\right)\to e-1$