第二部份：計算證明題（共 6 題，占 60 分） 114內壢高中

說明：每大題10分(需有計算過程只寫答案不給分)

作答時請將答案依照順序寫在答案本上。本部分1到5題只考慮實數系。

1. 國中數學與高中數學的連結:

(a)請利用國中數學所學二次方程式的根與判別式的關係證明：

若 x_1, x_2, x_3 皆不為零且 y_1, y_2, y_3 為任意數 則我們有柯西不等式(Cauchy inequality)

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \ge (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2$$

(b)請利用國中數學乘法公式範疇中的 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 的因式分解公式證明:

若 $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ 則我們有算幾不等式

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \ge \sqrt[3]{x_1x_2x_3}$$

$\boxed{1}$

$\boxed{a}$ 令 $f(t)=\sum_{i=1}^{n}(x_i t-y_i)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 t^2-2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i t+\sum_{i=1}^{n}y_i^2 \ge 0 \Rightarrow D\le 0 \Rightarrow \sum x_i^2 \sum y_i^2 \ge (\sum x_iy_i)^2$

$\boxed{b}$ $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=(a+b+c)\cdot\frac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)\ge 0$

令 $a=\sqrt[3]{x_1}$, $b=\sqrt[3]{x_2}$, $c=\sqrt[3]{x_3}$ $\Rightarrow$ ~ #

2. 證明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\text{收斂} \Leftrightarrow p>1$$

(Integral Test) $f(x)$ 在 $x\in[k,\infty)$ 為非負, 遞減 連續函數

$\int_k^\infty f(x)\,dx$ 存在 $\Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} f(n)$ 收斂, $\int_k^\infty f(x)\,dx$ 發散 $\Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} f(n)$ 發散

p-級數定理 (註:若有引用定理於證明中必須加以敘述)

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} 0<p\le 1: \text{發散} \\ p>1: \text{收斂}\end{cases}$

$p=1$: $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\ln|x|\Big|_1^b=\infty$

$p\ne 1$: $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx=\lim_{b\to\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right)=\begin{cases}\infty, & 1-p>0 \\ \frac{-1}{1-p}, & 1-p<0\end{cases}$ 即 $\begin{matrix}p<1\\p>1\end{matrix}$

"$\Leftarrow$" $p>1 \Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx=\frac{-1}{1-p}$ 存在 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收斂

"$\Rightarrow$" Cauchy condensation test: $\sum a_n$ con $\Leftrightarrow \sum 2^k a_{2^k}$ con

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ con $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot\frac{1}{(2^n)^p}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$ con (粘幸福)

$\Leftrightarrow \frac{1}{2^{p-1}}<1 \Leftrightarrow p>1$

35 3. 若 $x=15!$(即15的階乘數) 且 n=323, 求 x 被n除後的餘數。

$\boxed{3}$ wilson's theorem: p is prime $\Leftrightarrow (p-1)!\equiv -1 \pmod p$

$323=17\times 19$

$16!\equiv(-1)15!\equiv -1 \pmod{17} \Rightarrow \underline{15!\equiv 1 \pmod{17}}$

$18!\equiv(-1)(-2)(-3)\cdot 15!\equiv -1 \pmod{19}$

$\Rightarrow 6\cdot\square\equiv 6\cdot 15!\equiv 1 \pmod{19}$

找6在模19下的乘法反元 $6\cdot 3\equiv -1 \pmod{19}$

$\Rightarrow 6\cdot(-3)\equiv 1 \pmod{19}$

$\Rightarrow \underline{15!\equiv 16 \pmod{19}}$

$15!\equiv 19m+16\equiv 2m-1\equiv 1 \pmod{17} \Rightarrow m=17n+1$

$\Rightarrow 15!=19(17n+1)+16=19\times 17n+35$ 35 #

or $15!\equiv 19\times 17A+19B+16\equiv 2B-1\equiv 1 \pmod{17} \Rightarrow$ 取 $B=1$

4. 設 a_1,a_2,a_3,a_4 為兩兩互質的整數，且 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}=n$ 為整數，試求所有符合題意的 n 值。

$-4,-2,0,2,4$

$\boxed{4}$

$a_i \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow -1 \le \frac{1}{a_i} \le 1$

$\Rightarrow -4 \le n \le 4$

n	4	-4	3	-3	2	-2	1	-1	0
$\frac{1}{a_1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{-1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{-1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{-1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{-1}$	$\frac{1}{1}$
$\frac{1}{a_2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{-1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{-1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{-1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{-1}$	$\frac{1}{1}$
$\frac{1}{a_3}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{-1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{-2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{-1}$	$\frac{1}{-2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{-1}$
$\frac{1}{a_4}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{-1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{-2}$	$\frac{1}{-1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{-2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{-1}$
	ok	ok	不合		ok	ok	不合		ok

5. 設 a,b 為整數，且 $2 \le a \le b \le 2025$，並且滿足方程式 $a^{\log_b(a^{-32})}=b^{\log_a(ba^{-6})}$，則所有符合條件的數對 (a,b) 共有幾組？

5組

$\boxed{5}$ $-32\log_b a = (\log_a b)((\log_a b)-6)$

令 $t=\log_a b \Rightarrow t^3-6t^2+32=0$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -6 & +0 & +32 & 4 \\ & +4 & -8 & -32 & \\ \hline 1 & -2 & -8 & +0 & \end{array}$$

$t \quad -4$
$t \quad +2$

$\Rightarrow (t-4)^2(t+2)=0$

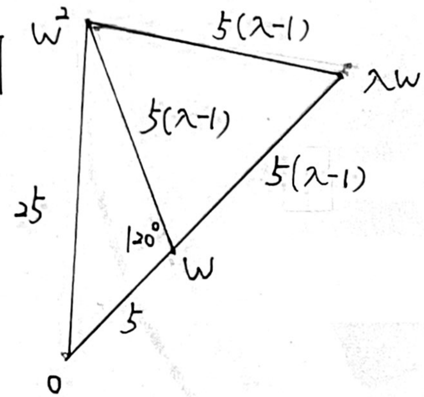
$\Rightarrow b=a^4$ or a^{-2} (不合)

a	b
2	16
3	81
4	256
5	625
6	1296

6. 設 ω 為複數，且 $|\omega|=5$，有一正實數 $\lambda>1$，使得 $\omega,\omega^2,\lambda\omega$ 這三個複數，在複數平面上形成一個正三角形，試求 λ 的值。

$\lambda=\frac{1+\sqrt{97}}{2}$

$\boxed{6}$



$|\lambda w-w|=|w|(\lambda-1)$

$25=1+(\lambda-1)^2-2(\lambda-1)(-\frac{1}{2})$

$\lambda^2-2\lambda-24=0 \Rightarrow \lambda=\frac{1+\sqrt{97}}{2}$