桃園市立內壢高級中等學校114學年度教師甄選

科目：數學科

說明：本試卷共分選擇題、非選擇題兩部份。第一部份：填充題占40%；第二部份：計算證明題占60%。請使用藍色或黑色原子筆或鋼筆書寫填答於「答案本」上，依題號作答，修正時應使用修正液(帶)。答案本 因考生書寫不清、污損等人為因素導致無法批改，由考生自行負責不得有異議。於試題卷上作答者，不予計分。本試題卷連同答案本一併交回，違規攜出試場者以零分計算。

第一部份：填充題（共 8 題，占 40 分）2025.11.9(日)星巴克～11.13(四) Ru

說明：作答時請將答案依照順序寫在答案本上。本部分1到7題只考慮實數系。

$\pm\sqrt{2011}$ 1. 若 $(x-\sqrt{x^2-2011})(y+\sqrt{y^2-2011})+2011=0$, 則 $2x+y=$ ________ 。

$\boxed{1}$ $xy-\sqrt{\ }\sqrt{\ }+x\sqrt{\ }-y\sqrt{\ }=(x-\sqrt{\ })(y+\sqrt{\ })=-2011$

$xy-\sqrt{\ }\sqrt{\ }-(x\sqrt{\ }-y\sqrt{\ })=(x+\sqrt{\ })(y-\sqrt{\ })=-2011$

$\Rightarrow x\sqrt{y^2-2011}=y\sqrt{x^2-2011} \Rightarrow x^2=y^2$

$\{xy-\sqrt{x^2-2011}\sqrt{y^2-2011}=-2011-(*)$

$x=y$ 代入 $(*)$

$\Rightarrow x^2-(x^2-2011)\neq-2011$

$x=-y$ 代入$(*)$

$\Rightarrow -x^2-x^2+2011=-2011$

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{2011}$

$\dfrac{1}{1002}$ 2. $C_0^{1001}-\dfrac{1}{2}C_1^{1001}+\dfrac{1}{3}C_2^{1001}+\cdots+\dfrac{(-1)^{1001}}{1002}C_{1001}^{1001}=$

法2 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}C_k^n$

$\boxed{2}$ 法1 $\dfrac{1}{k}C_{k-1}^{n}=\dfrac{1}{n+1}C_{k}^{n+1}$ $0=(1-1)^{n+1}=C_0^{n+1}-(C_1^{n+1}-C_2^{n+1}\cdots)$

$=1-1$

$=\dfrac{(n+1)\cdot n!}{k!(n+1-k)!}\cdot\dfrac{1}{n+1}$ $\Rightarrow \dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{1002}$

$\displaystyle=\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_k^nx^k\,dx$

$\displaystyle=\int_0^1(1-x)^n\,dx=\frac{-1}{n+1}(1-x)^{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}\Rightarrow\frac{1}{1002}$

$k\geq\dfrac{4}{3}$ 3. 找出所有可能的k值使得函數$f(x)=x^3+2x^2+kx-1$ 是具有反函數的(提示:題意即判斷f(x)何時是一對一函數)

答案: k值的範圍為 ________ 。

$\boxed{3}$ $f'(x)=3x^2+4x+k$ 恆$\geq0\Rightarrow D\leq0\Rightarrow k\geq\dfrac{4}{3}$

4. $\displaystyle\int\frac{\ln(x+1)}{x^2}dx=$ ________ 。

$-\dfrac{\ln(1+x)}{x}+\ln|x|-\ln|1+x|+C$

$\boxed{4}$ $u=\ln(x+1)$ $dv=x^{-2}dx$

$du=\dfrac{1}{x+1}dx$ $V=-x^{-1}$

$\displaystyle\Rightarrow\frac{-\ln(1+x)}{x}+\int(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1})dx=\sim$

19 5. 設 x 為整數，且 $\dfrac{x^3-x+360}{(x-1)(x+1)}$ 亦為整數，則符合條件的最大整數 x 為________。

$\boxed{5}$

$x+\dfrac{360}{x^2-1}\in\mathbb{Z} \Rightarrow x^2-1=1,2,3,\cdots\boxed{360} \Rightarrow x=19$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 6. 空間坐標中有三個點 $O(0,0,0)$，$A(0,1,1)$，$P(x,y,0)$，點 P 在空間中移動使得 $\angle OAP=30^\circ$ 且 $y\geq 0$，若 $x(y+1)$ 的最大值為 M 且最小值為 m，則數對 (M,m) =________________。(全對才給分)

$\boxed{6}$

$\overrightarrow{AO}=(0,-1,-1)$ $\quad \dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{-y+2}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2-2y+2}} \Rightarrow 3x^2+(y+1)^2=3 \Rightarrow \dfrac{x^2}{1}+\dfrac{(y+1)^2}{3}=1$

$\overrightarrow{AP}=(x,y-1,-1)$ $\quad \Rightarrow 3x^2+3y^2-6y+6=2(y^2-4y+4)$

令 $x=\cos\theta$

$y=-1+\sqrt{3}\sin\theta$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(2\theta)\in\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$\dfrac{5}{3}$ 7. 設有一顆正六面體骰子，其中三面塗成黃色，兩面塗成藍色，最後一面塗成紫色，投擲時每一面出現的機率相同，若投擲此骰子5次，紀錄黃色、藍色、紫色出現的次數各別為 x,y,z 次(其中 $x+y+z=5$)，則次數乘積 xyz 的期望值為________。

$\boxed{7}$

x	y	z
3	1	1
1	3	1
1	1	3
2	2	1
2	1	2
1	2	2

$\begin{pmatrix}3^3\cdot 2\cdot 1\\ +3\cdot 2^3\cdot 1\\ +3\cdot 2\cdot 1\end{pmatrix}\cdot 3\cdot\dfrac{5!}{3!}\cdot\dfrac{1}{6^5}+\begin{pmatrix}3^2\cdot 2^2\cdot 1\\ +3^2\cdot 2\cdot 1^2\\ +3\cdot 2^2\cdot 1^2\end{pmatrix}\cdot 4\cdot\dfrac{5!}{2!2!}\cdot\dfrac{1}{6^5}$

$\Rightarrow \dfrac{28\cdot 10+22\cdot 20}{6\cdot 6\cdot 6\cdot 2}=\dfrac{360}{6\cdot 6\cdot 6}=\dfrac{5}{3}$

$\dfrac{13}{4}$ 8. 設實係數多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1+i)=5$ 與 $f(i)=10$，其中 $i=\sqrt{-1}$，且 $f(x)$ 除以 $(x^2-2x+2)(x^2+1)$ 的餘式為 $g(x)$，則 $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{g(x)-5}{2x+1}$ 的值為________。

$\boxed{8}$

$f(x)=(x^2-2x+2)(x^2+1)Q(x)+Ax^3+Bx^2+Cx+D$

$f(i)=(-A+C)i+(-B+D)=10 \Rightarrow A=C\ ,\ D=B+10$

$f(1+i)=A(2i-2)+B(2i)+C(1+i)+D=5 \Rightarrow 3A+2B=0\ .\ -A+D=5 \Rightarrow A-B=5$

$\{2A-2B=10 \Rightarrow A=2,\ B=-3,\ D=7$

$\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{2x^3-3x^2+2x+7}{2x+1}=\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{6x^2-6x+2}{2}=3\cdot\dfrac{1}{4}+3\cdot\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{13}{4}$