臺北市立復興高級中學114學年度第一次專任教師甄選
數學科教師甄選筆試題目卷

2025.11.3(一) ~ 11.8(六) (運動會) Ru

准考證號碼後三碼:

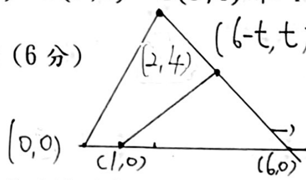
筆試時間：90 分鐘。滿分為 100 分。

第一部分：計算、證明題（第一題 6 分；第 2、3 題各 7 分；第 4-13 題各 8 分）

$12x-13y=12$

1、設 $A(2,4)$、$B(0,0)$、$C(6,0)$ 和 $P(1,0)$，求過 P 點且將 ΔABC 面積兩等分的直線方程式?（6 分）

$\boxed{1}$



$(6-t, t) = \left(\frac{18}{5}, \frac{12}{5}\right) \Leftarrow \frac{\Delta}{2} = 6 = \frac{1}{2}\cdot 5t$

$\to x+y=6 \quad \Rightarrow m = \frac{12}{13} \Rightarrow 12x-13y=12$

274

2、復興大樓前的樓梯有 10 階，小明每步可走一階、兩階或三階，求小明走上復興大樓的方法數有幾種?（7 分）

$\boxed{2}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	4	7	13	24	44	81	149	274

$a_3 = 4 \quad a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$

$-20x^3-20x^2-20x-19$

3、求 x^{40} 除以 $(x^2+1)(x+1)^2$ 的餘式 = ?（7 分）

$\boxed{3}$ 令 $f(x) = x^{40} = (x^2+1)(x+1)^2Q(x) + Ax^3+Bx^2+Cx+D$

$f(i) = (-A+C)i + (-B+D) = 1, \quad f(-1) = -A+B-C+D = 1 \Rightarrow A=B$

$\Rightarrow A=C, \quad D=B+1, \quad f'(x) = 40x^3 = (x+1)Q'(x) + 3Ax^2+2Bx+C$

$f'(-1) = -40 = 2A \Rightarrow A=B=C=-20$

$D=-19$

$\boxed{4}$ 法1: $\frac{1}{4}$

4、設 x 為實數，試求 $\dfrac{x-x^3}{1+2x^2+x^4}$ 的最大值=?（8 分）

令原式 $=k \Rightarrow kx^4+x^3+2kx^2-x+k=0 \Rightarrow k(t^2+2)+t+2k=0$

法2: the piano：令 $x=\tan\theta=t$

$\Rightarrow kx^2+x+2k-\frac{1}{x}+\frac{k}{x^2}=0$ 令 $t=x-\frac{1}{x} \Rightarrow kt^2+t+4k=0, D\geq 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}\leq k\leq\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1}{2}\sin 2\theta\cos 2\theta = \frac{1}{4}\sin 4\theta \leq \frac{1}{4}$

$-(m+n)$

5、令一等差數列的前 k 項和為 S_k，若已知 $S_n=m$ 且 $S_m=n$，求 S_{m+n} =?（8 分）

$2a_1+(n-1)d = \frac{2m}{n} \quad -①$

$2a_1+(m-1)d = \frac{2n}{m} \quad -②$

$① - ②$

$d = \frac{2}{n-m}\cdot\frac{m^2-n^2}{nm} = \frac{-2(m+n)}{nm}$

$(2a_1+(n-1)d)n = 2m$

$(2a_1+(m-1)d)m = 2n$

$2a_1(m+n) + (n(n-1)+m(m-1))d = 2(m+n)$

$S_{m+n} = \frac{2a_1(m+n)+(m+n-1)(m+n)d}{2}$

$= m+n+mnd = -(m+n)$

$\boxed{6}$ $\sqrt{5}$

6、$(\log x)^2 - [\log x] - 3 = 0$ 的所有實根之乘積為 10^m，其中 $[\cdot]$ 為高斯函數，則 m =?（8 分）

$[y] \leq y < [y]+1$

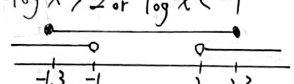
$\Rightarrow y-1 < [y] \leq y$

$\Rightarrow (\log x)-1 < (\log x)^2-3 = [\log x] \leq (\log x)$

$\Rightarrow \begin{cases} (\log x)^2-(\log x)-2>0 \\ (\log x)^2-(\log x)-3\leq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -1.3 \doteqdot \frac{1-\sqrt{13}}{2} \leq \log x \leq \frac{1+\sqrt{13}}{2} \doteqdot 2.3 \\ \log x > 2 \text{ or } \log x < -1 \end{cases}$

3.6
$\sqrt{13}$
$\frac{3}{3}$ 9
$\frac{3}{6\square}$ 400



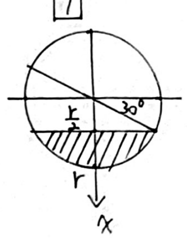
$\Rightarrow [\log x] = 2$ or -2

$\Rightarrow \log_{10} x = \sqrt{5}$ or 1, $1^2-1-3=0$ 不合

$\frac{5}{24}\pi r^3$

7、將半徑為 r 的半球體容器裝滿水，平放於桌上(側視圖為開口向上的下半圓)，如今將之慢慢傾斜 $30°$，在不考慮內聚力、附著力等各種物理現象下，試求此時容器內剩下的水之體積為多少?（8 分）

$\boxed{7}$



$x^2+y^2=r^2$

$\int_{\frac{r}{2}}^{r} \pi(r^2-x^2)\,dx = \pi r^3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8}\right) = \frac{5}{24}\pi r^3$

4

8、$5x^2-6xy+5y^2-4x-4y-4=0$，求 $(x-1)^2+(y-1)^2$ 的最大值=?（8 分）

$\boxed{8}$ $5(x-y)^2+4(x-1)(y-1)=8$ $\quad 5(u-v)^2+4uv=8$

令 $u=x-1,\ v=y-1$ $\quad \Rightarrow 5(u^2+v^2)=6uv+8\le 3(u^2+v^2)+8 \Rightarrow u^2+v^2\le 4$

x	y
50	2000
20	5000
40	2500
16	6250
80	1250
32	3125
25	4000

9、設 $x,y\in\mathbb{N}$ 且 $x<y$，若 $\log x$ 的首數為 m，尾數為 α，而 $\log y$ 的首數為 n，尾數為 β，已知 $m^2+n^2=10$ 且 $\alpha+\beta=1$，求所有數對 (x,y)=?（8 分）

$\boxed{9}$ $\log x=1+\alpha \Rightarrow xy=10^5$ $\quad x$ $\quad 5^1\cdot 2^2=20$ $\quad 5^2\cdot 2=50$

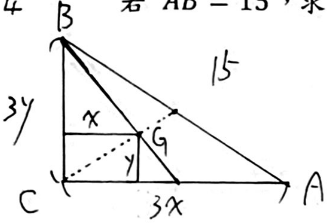
$\log y=4-\alpha$ $\quad 10<x<100$ $\quad 2^4=16$ $\quad 2^5=32$ $\quad 5^2=25$ $\quad 5^1\cdot 2^3=40$ $\quad 5^1\cdot 2^4=80$

10、在 ΔABC 中，$\angle C$ 為直角，G為重心，且 G 到 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 的距離和為 6。

$\frac{99}{4}$

若 $\overline{AB}=15$，求 ΔABC 的面積=?（8 分）

$\boxed{10}$



$a+b=18$ $\quad a^2+b^2=15^2$ $\quad \frac{ab}{2}=\frac{18^2-15^2}{4}=\frac{99}{4}$

11、三角形ABC，$\angle A$、$\angle B$ 與$\angle C$ 分別對應的三邊長為 a、b 與 c，已知$\angle A=42^\circ$ 且

46°

$b^2-c^2=ac$，求 $\angle C$ =?（8 分）

$\boxed{11}$

$\sin(B+C)\sin(B-C)=\sin A\sin C$

$\Rightarrow \angle B=2\angle C \Rightarrow \frac{180^\circ-42^\circ}{3}=46^\circ$

12、有 n 組數據:$\sqrt{1}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$、$\sqrt{7}$、…、$\sqrt{2n-1}$，

$\frac{\sqrt{2}}{4}$

令這 n 組數據的算術平均為 μ_n，標準差為 σ_n，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sigma_n}{\mu_n}$ = ?（8 分）

$\boxed{12}$

$\frac{1}{n}\Sigma\sqrt{\frac{2k-1}{n}}$

$\to \int_0^1\sqrt{2}\,x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma\left(\frac{2k-1}{n}\right)-\left(\frac{1}{n}\Sigma\sqrt{\frac{2k-1}{n}}\right)^2}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}\to\frac{\sqrt{2\int_0^1 x\,dx-\frac{8}{9}}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$\frac{-5-\sqrt{5}}{2}$

13、數列$\{a_n\}$ 滿足 $a_1=1$ 且 $a_{n+1}=\frac{-3-\sqrt{5}}{2a_n+2}$, $(\forall n\ge 1)$，求 a_{2025} =?（8 分）

$\boxed{13}$

$a_1=1$

$a_2=\frac{-3-\sqrt{5}}{4}$

$a_3=\frac{-3-\sqrt{5}}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}=2\cdot\frac{(3+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{4}=4+2\sqrt{5}$

$a_4=\frac{-3-\sqrt{5}}{2(5+2\sqrt{5})}=\frac{(-3-\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}{2\cdot 5}=\frac{-5+\sqrt{5}}{10}$

$a_5=\frac{-3-\sqrt{5}}{\frac{5+\sqrt{5}}{5}}=\frac{(-3-\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{4}=\frac{-5-\sqrt{5}}{2}$

$a_6=\frac{-3-\sqrt{5}}{-3-\sqrt{5}}=1$

$2025\equiv 0 \pmod 5$

$\Rightarrow \frac{-5-\sqrt{5}}{2}$

本試卷結束