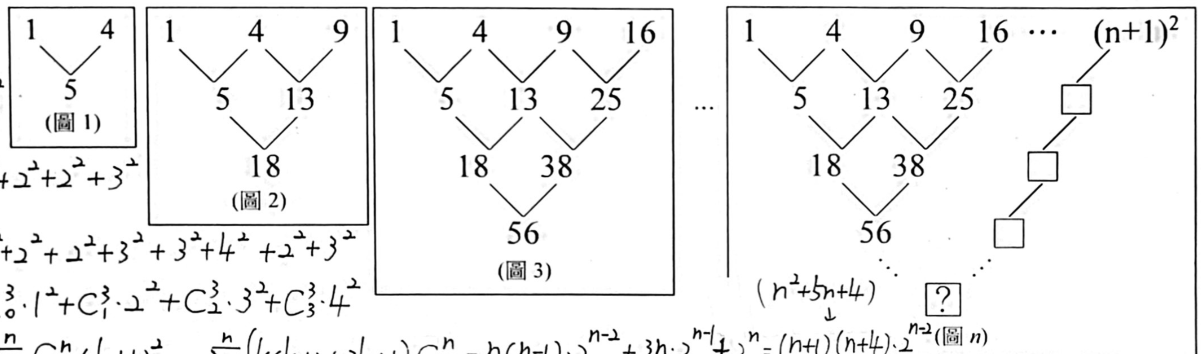
14、重覆擲一個公正骰子，直到出現第二個 1 點就停止，若 X 表示投擲的總次數，則當機率 $P(X=k)$ 有最大值時，$k=$ 6 or 7 。

$\boxed{14}$ $P(X=k)=C^{k-1}_{k-2}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$ $\Rightarrow \begin{cases}(k-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2}\ge k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\\ (k-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2}\ge (k-2)\left(\frac{5}{6}\right)^{k-3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{6}k\ge 1\\ \frac{1}{6}k\le\frac{7}{6}\end{cases}\Rightarrow 6\le k\le 7$

15、(圖 1)中，1+4=5；(圖 2)中，1+4=5、4+9=13、5+13=18；依此類推，每個圖的第 k 列數列為第 k-1 列相鄰兩數之和所形成的數列，每列比前一列少 1 項，並依此於最後一列得到一個整數。已知(圖 n)中，第一列數列為 1、4、9、16、…、$(n+1)^2$，並依上述規則得到最後一列的整數，則此整數為 $(n+1)(n+4)2^{n-2}$ 。(以 n 表示)

$\boxed{15}$



$a_1=1^2+2^2$

$a_2=1^2+2^2+2^2+3^2$

$a_3=1^2+2^2+2^2+3^2+3^2+4^2+2^2+3^2$

$=C^3_0\cdot1^2+C^3_1\cdot2^2+C^3_2\cdot3^2+C^3_3\cdot4^2$

$a_n=\sum_{k=0}^{n}C^n_k(k+1)^2=\sum_{k=0}^{n}\left(k(k-1)+3k+1\right)C^n_k=n(n-1)\cdot2^{n-2}+3n\cdot2^{n-1}+2^n=(n+1)(n+4)\cdot2^{n-2}$

$k^2+2k+1=k(k-1)+3k+1$

$\boxed{1}$ $\begin{matrix}2 & -2 & -1 & 2 & -2 & -1\\ 1 & -4 & 1 & 1 & -4 & 1\end{matrix}$ $-6\ \ -3\ \ -6$ $3(2,1,2)$

法1：$P(2s-1,-2s+2,-s)$ $Q(t+3,-4t+1,t+1)$ $\left((2s-t-4)^2+(-2s+4t+1)^2+(-s-t-1)^2\right)(2^2+1^2+2^2)\ge(-8+1-2)^2=81$

$\Rightarrow \overline{PQ}\ge3$ #

二、計算證明題(共 25 分)

法2

1、想要求兩個歪斜線 $L_1:\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{-1}$ 與 $L_2:\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-1}{1}$ 的距離，在現有各版本教材中，通常採用以下兩種方法：

$\vec{u}=\overrightarrow{AC}=(4,-1,1)$ $|\vec{u}|\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{27}{9}=3$ # (113 復興)

$\vec{n}=(6,3,6)$

(法 1)設 $P(-1+2t,2-2t,-t)$，$Q(3+s,1-4s,1+s)$，$\overrightarrow{PQ}$ 分別與兩直線方向向量內積值為 0，聯立解出 s,t 後，$|\overrightarrow{PQ}|$ 即為兩歪斜線距離。

法3：$V=\left|\begin{vmatrix}\vec{v_1}\\ \vec{v_2}\\ \overrightarrow{AC}\end{vmatrix}\right|=|\vec{v_1}\times\vec{v_2}|\,d(L_1,L_2)$

(法 2)求出包含 L_2 且平行 L_1 之平面方程式 E，則 L_1 上任一點到平面 E 的距離即為兩歪斜線距離。

現有學生張彰，跟你請教是否有其他可以求出兩歪斜線距離的方法？請向張彰說出$\boxed{兩個}$異於(法 1)與(法 2)且限於 108 課綱內容的方法，來求出兩個歪斜線 L_1 與 L_2 的距離。(1 個方法 4 分，請先簡述想法，再寫出計算過程及解答)

$\boxed{2}$ $|z|^3=\left|-\left(\frac{2}{3}z+1+\frac{7}{z^6}\right)\right|\le\frac{2}{3}|z|+1+\frac{7}{|z|^6}$，令 $f(t)=t^3-\frac{2}{3}t-1\le\frac{7}{t^6}$，$f'(t)=3t^2-\frac{2}{3}=0\Rightarrow t=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$

設 $|z|\ge\frac{3}{2}$ $(t=|z|)$ $\left(t\ge\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{1}{t}\le\frac{2}{3}\right)$ f is increasing on $\left[\frac{\sqrt{2}}{3},\infty\right)$

2、$z\in\mathbb{C}$ 為 $x^9+\frac{2}{3}x^7+x^6+7=0$ 的解，試證明：$|z|<\frac{3}{2}$。(8 分)

$\Rightarrow\frac{11}{8}=\frac{27}{8}-2=f\left(\frac{3}{2}\right)\le f(t)\le7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6\doteq0.61$ $\times$

$\boxed{3}$ $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{3-0}{n}\sqrt{4+\left(\frac{(3-0)}{n}k\right)^2}\longrightarrow\int_0^3\sqrt{4+x^2}\,dx$

3、(1)(單選題，2 分) C

試問極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}\left(\sqrt{4n^2+9\times1^2}+\sqrt{4n^2+9\times2^2}+\cdots+\sqrt{4n^2+9\times(n-1)^2}\right)$ 的值可用下列哪一個定積分表示？

$2\ln\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)+\frac{3\sqrt{13}}{2}$

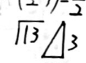
(A) $\int_0^3\sqrt{1+x^2}\,dx$ (B) $\int_0^3\sqrt{1+9x^2}\,dx$ (C) $\int_0^3\sqrt{4+x^2}\,dx$ (D) $\int_0^3\sqrt{4+9x^2}\,dx$ (E) $\int_0^3\sqrt{4x^2+9}\,dx$

令 $x=2\tan\theta\in[0,3]$，$0\le\theta\le\tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$

$dx=2\sec^2\theta\,d\theta$ $\left(\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right)=\frac{3}{2}\right)$

(2)承(1)，請求出此極限值。(計算題，需列計算過程，7 分)

$4\int_0^{\tan^{-1}(\frac{3}{2})}\sec^3\theta\,d\theta$ $(\sec^2\theta-1)$



$u=\sec\theta$ $dv=\sec^2\theta\,d\theta$ $V=\tan\theta$ $du=\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

$\int\sec^3\theta\,d\theta=\tan\theta\sec\theta-\int\sec\theta\tan^2\theta\,d\theta$ $=2\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}+\ln\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\right)=2\ln\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)+\frac{3\sqrt{13}}{2}$ #

$\Rightarrow\int\sec^3\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\left(\tan\theta\sec\theta+\int\frac{\sec\theta(\sec\theta+\tan\theta)}{\sec\theta+\tan\theta}d\theta\right)=\frac{1}{2}\left(\tan\theta\sec\theta+\ln|\sec\theta+\tan\theta|\right)$ 先備