95 基隆　2025.10.20(一) ~10.30(四) Ru

國立彰化女子高級中學 114 學年度第一次教師甄試【數學科】題目卷

weiye 一、填充題(每題 5 分，答案都須化為最簡分數或有理化，且完全正確才給分，共 75 分)

(5,4) (4,5)

1、已知 x,y 為自然數，若 $\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{3}{7}$，試求出所有的數對 (x,y)。

$\boxed{1}$

$3x^2-(3y+7)x+3y^2-7y=0$

$D\geq 0 \Rightarrow 9y^2+42y+49-12(3y^2-7y)\geq 0$

$\Rightarrow 27y^2-126y-49\leq 0$

$\dfrac{126 \pm \sqrt{9\cdot 14^2+4\cdot 49\cdot 27}}{2\cdot 27} = \dfrac{126\pm 3\cdot 14\cdot 2\sqrt{3}}{2\cdot 27}$, $\sqrt{9\cdot 14^2+4\cdot 49\cdot 27}=\sqrt{9\cdot 14^2\cdot 12}$, 1.732

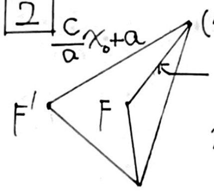
$\Rightarrow 0<y<\dfrac{14\sqrt{3}}{9}\approx 5.\sim$

y	
1	$3x^2-10x-4=0$
2	$3x^2-13x-2=0$
3	$3x^2-16x+6=0$
4	$3x^2-19x+20=0$ → (4,5)
5	$3x^2-22x+40=0$ → (5,4)

2、已知過點 $(3,0)$ 且斜率為 m 之直線 L，和雙曲線 $\Gamma: x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的右半邊圖形交於 A,B 兩點。設 $F(2,0)$ 為雙曲線 Γ 的右焦點，若 $\overline{AF}+\overline{BF}=16$，則 m 值為

± 3

$\boxed{2}$



焦半徑

設 $L: y=m(x-3)$

代入 Γ

$\Rightarrow 3x^2-m^2(x-3)^2=3$

$(m^2-3)x^2-6m^2x+9m^2+3=0$ 兩根 $\alpha,\beta\ (\in\mathbb{R})$

$a=1,\ c=2$

$\dfrac{c}{a}\alpha-a+\dfrac{c}{a}\beta-a=16$

$\Rightarrow \alpha+\beta=9=\dfrac{6m^2}{m^2-3} \Rightarrow m=\pm 3$

($\overline{PF}=d(P,L)\cdot e$ 也可求出 $\alpha+\beta$)

3、已知數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_1=0$，$a_2=1$ 且當 $n\geq 3$ 時，$a_n=(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2})$，試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n!}$ 之值

$\frac{1}{e}$

$\boxed{3}$

$a_n-na_{n-1}=-(a_{n-1}-(n-1)a_{n-2})$

令 $b_n = -b_{n-1}$

$b_2=1-2\cdot 0=1$, $b_n=(-1)^{n-2}\cdot b_2=(-1)^n$

$\dfrac{a_n}{n!}=\dfrac{n\cdot a_{n-1}+(-1)^n}{n!}$

$\Rightarrow \dfrac{a_n}{n!}=\dfrac{a_{n-1}}{(n-1)!}+\dfrac{(-1)^n}{n!}$

$e^x=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}$

$\dfrac{a_2}{2!}=\dfrac{a_1}{1!}+\dfrac{(-1)^2}{2!}$

$\dfrac{a_3}{3!}=\dfrac{a_2}{2!}+\dfrac{(-1)^3}{3!}$

$\dfrac{a_4}{4!}=\dfrac{a_3}{3!}+\dfrac{(-1)^4}{4!}$

$\vdots$

$\dfrac{a_n}{n!}=\dfrac{a_{n-1}}{(n-1)!}+\dfrac{(-1)^n}{n!}$

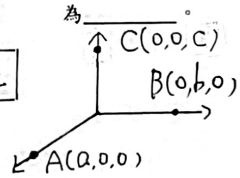
$\Rightarrow \dfrac{a_n}{n!}=\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{5!}+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{n!}$

$\rightarrow \dfrac{1}{e}$

4、三角錐 $O-ABC$ 中，三稜邊 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$ 兩兩相互垂直，若 ΔABC 面積為 1，則三角錐 $O-ABC$ 的體積最大值為________。

$\frac{\sqrt[4]{12}}{9}$

$\boxed{4}$



$\begin{matrix} -a & b & 0 & -a & b & 0 \\ -a & 0 & c & -a & 0 & c \end{matrix}$

$1=\frac{1}{2}\sqrt{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}$

$4=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\geq 3\cdot(abc)^{\frac{4}{3}}$

$V=\dfrac{abc}{6}\leq\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{3}{4}}=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3}{3}\right)^{\frac{3}{4}}=\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{12^{\frac{1}{4}}}{3}=\dfrac{\sqrt[4]{12}}{9}$

5、已知 $f(x)=x^4-2x^3-9x^2+7$ 與 $g(x)=x^3-4x^2-x+3$ 為兩個整數係數多項式，假設 $g(x)=0$ 的三個相異根分別為 α,β,γ，

-13

$\boxed{5}$

求 $\dfrac{f(\alpha)}{f(\beta)f(\gamma)}+\dfrac{f(\beta)}{f(\gamma)f(\alpha)}+\dfrac{f(\gamma)}{f(\alpha)f(\beta)}$ 之值

$\dfrac{(1-\alpha)^2+(1-\beta)^2+(1-\gamma)^2}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2(\alpha+\beta+\gamma)+3}{g(1)}$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -9 & +0 & +7 \\ 1-4-1+3 & 1 & -4 & -1 & +3 & \\ \hline & & 2 & -8 & -3 & +7 \\ & & 2 & -8 & -2 & +6 \\ \hline & & & & -1 & +1 \end{array}$$

商 $1+2$

$f(x)=g(x)(x+2)-x+1$

$f(\alpha)=1-\alpha$, $f(\gamma)=1-\gamma$

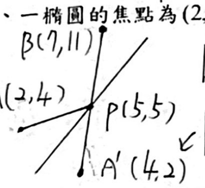
$f(\beta)=1-\beta$

$=\dfrac{16-2(-1)-2\cdot 4+3}{-1}=-13$

6、一橢圓的焦點為 $(2,4)$ 及 $(7,11)$，橢圓上一點 $P(5,5)$，試找出過 P 與橢圓相切的切線方程式為________。

$x-y=0$

$\boxed{6}$



$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{A'P}|$

$|(3,1)|=|(1,3)|$

$\vec{n}\,//\,(1,-1)$

$\Rightarrow x-y=0$

$(5,5)$

7、xy 平面上，兩圓 $C_1: x^2+y^2=1$ 及 $C_2: (x-4)^2+y^2=4$，動點 P 從 $(1,0)$ 出發沿 C_1 依逆時針方向運動，同時動點 Q 從 $(6,0)$ 出發沿 C_2 依逆時針方向運動，若 P 點的角速度為 Q 點的兩倍，則 $\overline{PQ}$ 的最大值為________。

$\frac{5\sqrt{5}}{2}$

$\boxed{7}$

$P(2c^2-1,\ 2sc)$

$Q(2c+4,\ 2s)$

$\overline{PQ}^2=(2c^2-2c-5)^2-4(c^2-1)(c^2-2c+1)$

$=4c^4+4c^2+25-8c^3-20c^2+20c-4(c^4-2c^3+c^2-c^2+2c-1)$

$=-16c^2+12c+29\leq\dfrac{1}{4\cdot 16}\cdot(4\cdot 4\cdot 9+16\cdot 16)=\dfrac{125}{4}\Rightarrow\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$

8、A 有 2 枚公正的硬幣，B 有 1 枚公正的硬幣，兩人進行遊戲，規則如下：

$\frac{49}{64}$

(1)將自己的所有硬幣拋出，正面多的一方取走對方的一枚硬幣。

(2)若雙方的正面數相同，則雙方都不取走對方的硬幣。

$\boxed{8}$

上述的動作為一局，當有一方擁有 3 枚硬幣便贏得遊戲(即遊戲結束)，否則就繼續進行下一局。求 A 在前 3 局贏得遊戲的機率為

$p(\text{2枚}\to\text{3枚}) = p(++)\cdot p(+\text{ or }-) + p(+-\text{ or }-+)\cdot p(-) = \frac14\cdot 1 + \frac24\cdot\frac12 = \frac48$

$p(\text{2枚}\to\text{2枚}) = p(+-\text{ or }-+)\cdot p(+) + p(--)\cdot p(-) = \frac24\cdot\frac12 + \frac14\cdot\frac12 = \frac38 \Rightarrow p(\text{2枚}\to\text{1枚}) = \frac18$

$p(\#1\text{局 win}) = \frac{32}{64}$, $p(\#2\text{局 win}) = \frac38\cdot\frac48 = \frac{12}{64}$

$p(\#3\text{局 win}) = \frac38\cdot\frac38\cdot\frac12 + \frac18\cdot\frac18\cdot\frac12 = \frac{5}{64}$

$\Rightarrow \frac{49}{64}$

9、P 點位於第三或第四象限，現向 $y=x^2$ 做兩切線，若兩切點的距離為 $\sqrt{12}$，則 P 點的橫坐標限制為________。

$-\frac{\sqrt3}{2} < x < \frac{\sqrt3}{2}$

$\boxed{9}$ $A(\alpha,\alpha^2)$, $B(\beta,\beta^2)$

$m_1 = f'(\alpha) = 2\alpha$

$2\alpha x - y = \alpha^2$

$2\beta x - y = \beta^2$

$\Rightarrow P: \begin{cases} x = \frac{\alpha+\beta}{2} \\ y = \alpha\beta \end{cases}$

$4\times 3 = (\alpha-\beta)^2(1+(\alpha+\beta)^2) = (4x^2-4y)(4x^2+1)$

$\Rightarrow y = \frac{4x^4+x^2-3}{4x^2+1} < 0$

$\begin{matrix} 4 & -3 \\ 1 & +1 \end{matrix} \Rightarrow \left(\frac{-\sqrt3}{2}, \frac{\sqrt3}{2}\right)$

(peter0210)

速度函數: $V_1(t) = \frac12 t + 4$

水量函數: $F(t) = \int V(t)\,dt$

$\boxed{10}$

10、有一個足夠大的水桶，在 t 秒 $(t\ge 0)$ 時向水桶內注水，注水速度為 $(\frac12 t+4)\text{cm}^3/秒$，此時水桶內的水量為 $V(t)\text{cm}^3$，

↓改成 $F(t)$

$-8+4\sqrt{35}$

$\boxed{10}$

已知 $V(0)=100\text{cm}^3$。但每當水桶中的水量達 120cm^3 時，在注水的同時也以 $13\text{cm}^3/秒$ 的速度讓水流出，且當水桶內的水量降至 80cm^3 時停止讓水流出(但依舊持續注水)。試問第________秒時水量會第二次達到 120cm^3。

水量 $(t=0)$ $100 \longrightarrow (t=4)\ 120 \longrightarrow V_2(t) = \frac12 t - 9 \longrightarrow 80\ (t=12) \longrightarrow 120$

$F_1(t) = \frac14 t^2 + 4t + 100$ $(F_1(0)=100)$

$F_1(t) = 120 \Rightarrow t^2+16t-80=0$, $\begin{matrix} t & +20 \\ t & -4 \end{matrix} \Rightarrow t=4$

$F_2(t) = \frac14 t^2 - 9t + \square \leftarrow 152$, $F_2(4) = -32 + \square = 120$

$F_2(t) = 80 \Rightarrow t^2 - 36t + 288 = 0 \Rightarrow t = 12 \text{ or } 24$

$F_3(t) = \frac14 t^2 + 4t + \square \leftarrow (-4)$

$F_3(12) = 36+48+\square = 80$

$F_3(t) = 120$

$\Rightarrow t^2+16t-496=0$

$4 \,|\, 496$, $4 \,|\, 124$, 31

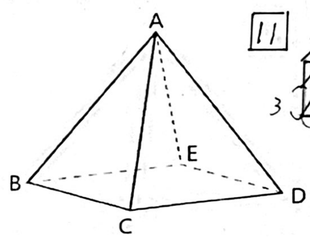
$D = 16\times16 + 16\times4\times31$

$= 16\times4\times35$

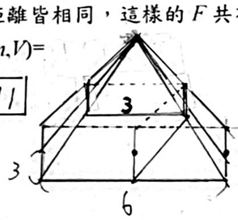
$\Rightarrow t = -8+4\sqrt5$

11、空間中有一個直四角錐（如下圖），其中底面 $BCDE$ 為邊長 6 的正方形，且 $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{AE}=5$，若平面 F 滿足到 A、B、C、D、E 五點距離皆相同，這樣的 F 共有 n 個，且滿足此條件的所有平面 F 可圍成另一個多面體，此多面體的體積為 V，求數對 $(n,V)=$

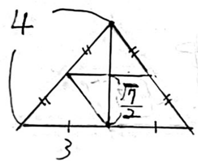
$(5, \frac{3\sqrt7}{2})$



$\boxed{11}$



4



$\left(\frac18 \cdot V_{ABCDE}\right)$ thepiano

$V = \frac13\cdot 3^2\cdot\frac{\sqrt7}{2} = \frac{3\sqrt7}{2}$ #

12、將彰化女中校歌前兩句「巍巍八卦山峨峨彰女中」共有 10 字重新排列，若希望同時滿足以下三條件：

7960

(1)同字不相鄰　(2)「八」、「卦」、「山」三字順序維持　(3)「彰」、「女」、「中」三字順序維持且皆不相鄰，

CCC不 − CCC不∩(AA相鄰+BB相鄰 − AA相鄰且BB相鄰)

$\boxed{12}$

那麼排列的方法共有________種。

AA BB CCC DDD

不 不 不

CCC

ˇAˇAˇBˇBˇDˇDˇDˇ

$\frac{7!}{3!2!2!}C^8_3 - \frac{6!}{3!2!}C^7_3\cdot 2 + \frac{5!}{3!}C^6_3$

$= 11760 - 4200 + 400 = 7960$

$\frac{\sqrt2}{3}$

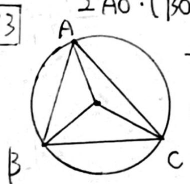
13、設 ΔABC 的外心為 O，滿足 $2\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{CA}+5\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，則 $\cos B$ 的最小值為______。

$\boxed{13}$

$2\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}) + 3\overrightarrow{BO}\cdot(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}) + 5\overrightarrow{CO}\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}) = \vec{0}$

$-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} + 3\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA} = \vec{0}$

$\Rightarrow 3\cos2B = \cos2C + 2\cos2A$



$3(1-2\sin^2B) = 1-2\sin^2C + 2(1-2\sin^2A)$

$\Rightarrow 3b^2 = 2a^2 + c^2$

$\Rightarrow \cos B = \frac{a^2+c^2-\frac23a^2-\frac13c^2}{2ac} = \frac{\frac13a^2+\frac23c^2}{2ac} \ge \frac{\sqrt2}{3}$