臺北市立第一女子高級中學 114 學年度第二次正式教師甄選

數學科試題暨測驗題答案

一、填充題（每格 8 分，共 64 分）

2025.10.10(五)～10.19(日) Ru

1. 已知 k 為實數，且 α,β 為方程式 $x^2+kx-2025=0$ 的兩根。若方程式 $x^2+\alpha x+\beta=0$ 有重根 r，則 $r=$ $\underline{\dfrac{3\sqrt[3]{300}}{2}}$。（答案需化為最簡根式）

$\boxed{1}$ $-2r\cdot r^2=-2025$ $\Rightarrow r=\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{300}$

$5^2\cdot 81$

2. 平面上非零向量 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 滿足 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$，且 $\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=20\left|\overrightarrow{a}\right|$、$\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=25\left|\overrightarrow{b}\right|$，則 $\left|\overrightarrow{c}\right|$ 的最小值為 $\underline{10\sqrt{10}}$。

$\boxed{2}$ $|\overrightarrow{c}|\cos\alpha=20\frac{|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{b}|}$ $\Rightarrow |\overrightarrow{c}|^2\geq 2\cdot 20\cdot 25 \Rightarrow |\overrightarrow{c}|\geq 10\sqrt{10}$

$|\overrightarrow{c}|\sin\alpha=25\frac{|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}|}$

3. 阿綠想在她的表演服裝縫上 6 顆相同的紅色鈕扣、3 顆相同的綠色鈕扣和 3 顆相同的黃色鈕扣。若所有鈕扣需鉛直地排成一直線，且相鄰鈕扣不同色，則阿綠有 $\underline{\ 100\ }$ 種排列方法。

$\boxed{3}$ G G G Y Y Y / R R R R R R　C^5_3 Y Y G or Y　$10\cdot 2\cdot 2=40$　G G (YG) Y Y / R R R R R R　$\frac{5!}{2!2!}=60$ $\Rightarrow 100$

$\boxed{4}$ 4. 已知 $\langle a_n\rangle$ 為等差數列，其中 $a_5=1$，公差 $d>0$，且 $\displaystyle\sum_{k=1}^{7}\frac{1}{a_k\cdot a_{k+1}\cdot a_{k+2}}=7$，則 $d=$ $\underline{\dfrac{5}{12}}$。

$\frac{1}{2d}\left(\frac{1}{a_k(a_k+d)}-\frac{1}{(a_k+d)(a_k+2d)}\right)=\frac{1}{2d^2}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_k+d}-\left(\frac{1}{a_k+d}-\frac{1}{a_k+2d}\right)\right)\Rightarrow\frac{1}{2d^2}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+7d}-\left(\frac{1}{a_1+d}-\frac{1}{a_1+8d}\right)\right)\Rightarrow\frac{2d}{2d(16d^2-1)(9d^2-1)}=\frac{1}{1}$

$a_1+4d=1$

$=\frac{1}{2d^2}\left(\frac{1}{1-4d}-\frac{1}{1+3d}-\left(\frac{1}{1-3d}-\frac{1}{1+4d}\right)\right)$

$=\frac{7d}{2d^2}\left(\frac{1}{(1-4d)(1+3d)}-\frac{1}{(1-3d)(1+4d)}\right)$

$=7$

$\Rightarrow 144d^4-25d^2=0$

$\Rightarrow d=\frac{5}{12}$

5. 求值：$\displaystyle\int_{-2}^{2}\max\{x,x^2,x^3-2x\}dx=$ $\underline{\dfrac{71}{12}}$

$\boxed{5}$ $\begin{cases}x\geq x^2\\ x\geq x^3-2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\leq x\leq 1\\ 0\leq x\leq 3\end{cases}\Rightarrow 0\leq x\leq 1$

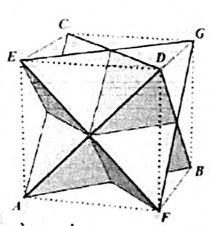
$\begin{cases}x^2\geq x\\ x^2\geq x^3-2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x(x-1)\geq 0\\ x(x-2)(x+1)\leq 0\end{cases}\Rightarrow -2\leq x\leq -1$ or $1\leq x\leq 2$

$-1\quad 0\quad 1\quad 2$

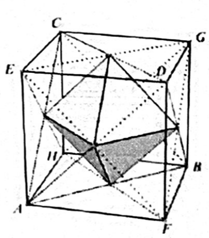
6. 阿綠由一個正六面體雕刻出一個立體作品（如圖一），此立體作品是正四面體 $ABCD$ 與正四面體 $EFGH$ 之嵌合。已知兩正四面體 $ABCD$ 與 $EFGH$ 重疊之部分，剛好是以原正六面體各面之中心為頂點的正八面體（如圖二）。若原正六面體的稜長為 1，則圖一中的立體作品之體積為 $\underline{\dfrac{1}{2}}$。

$\begin{cases}x^3-2x\geq x\\ x^3-2x\geq x^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x(x-3)\geq 0\\ x(x+1)(x-2)\geq 0\end{cases}$

$-1\quad 0\quad 2\quad 3$



（圖一）



（圖二）

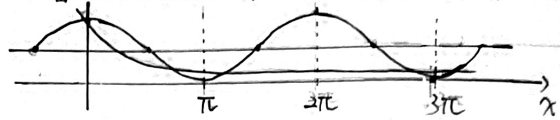
$\boxed{6}$ $1-\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)12=\frac{1}{2}$

$\int_0^1 x\,dx+\int_{-2}^{-1}x^2dx+\int_1^2 x^2dx+\int_{-1}^{0}(x^3-2x)dx$

$=\frac{1}{2}+\frac{7}{3}+\frac{7}{3}+\frac{-1}{4}-(-1)=\frac{71}{12}$

7. 當 $0 \le x \le 2025\pi$ 時，方程式 $2^x(1+\cos x)=2$ 共有 2026 個相異實數解。

$\boxed{7}$



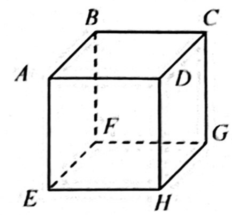
$y=1+\cos x$

$y=2(\frac{1}{2})^x$

$\boxed{8}$ $A \to \begin{matrix}B\\D\\E\end{matrix} \to A \to \begin{matrix}B\\D\\E\end{matrix} \to \begin{matrix}C\\F\end{matrix} \to G$

$3\cdot1\cdot3\cdot2=18$

8. 一隻螞蟻沿著正立方體 $ABCD\text{-}EFGH$（如右圖）的稜爬行，每次移動都是從某個頂點沿著正立方體的稜爬行至某個相鄰的頂點，且到每個相鄰頂點的機率均為 $\frac{1}{3}$。已知這隻螞蟻一開始從 A 點出發，則在五次移動之後，到達 G 點的機率為 $\frac{20}{81}$。



$A \to \begin{matrix}B\\D\\E\end{matrix} \to \begin{matrix}C\\F\end{matrix} \to G \to \begin{matrix}C\\F\\H\end{matrix} \to G$

$3\cdot2\cdot1\cdot3=18$

$A \to \begin{matrix}B\\D\\E\end{matrix} \to \begin{matrix}C\\F\end{matrix} \to \begin{matrix}B\\D\end{matrix} \to \begin{matrix}C\\F\end{matrix} \to G$

$3\cdot2\cdot2\cdot2=24$

$\frac{60}{3^5}=\frac{20}{81}$

二、計算證明題（共 86 分）

1. （18 分）我們知道，對於一組數據 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 而言，算術平均數 $\mu=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，

而當我們要計算變異數 σ^2 時，有兩個公式：

$$\begin{cases}\sigma^2=\dfrac{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2}{n}\\[2ex] \sigma^2=\dfrac{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+\cdots+x_n^{\,2}}{n}-\mu^2\end{cases}。$$

學生阿綠發問：為什麼要有兩個不同的公式？不能只學第一個就好了嗎？

請問你會如何向阿綠解說？

$\boxed{2}$

2. （18 分）阿綠練習二階考題如下：

$\frac{4}{3}\le x<\frac{5}{3}$

已知對於實數 x 而言，$[x]$ 表示不大於 x 之最大整數。若 $[x]+[3x]=5$，試求出 x 之範圍。

令

以下是阿綠解題的過程，請你

$x=n+t$

(1)找出錯誤之處；　(2)提供正確作法；　(3)闡述你向阿綠解說的過程。

$n\in\mathbb{Z},\ 0\le t<1$

$3x=3n+3t,\ 0\le 3t<3$

$0\le t<\frac{1}{3}$：$n+3n=5$，不合

$\frac{1}{3}\le t<\frac{2}{3}$：$n+3n+1=5 \Rightarrow n=1$

$\Rightarrow \frac{4}{3}\le x<\frac{5}{3}$

$\frac{2}{3}\le t<1$：$n+3n+2=5$，不合

已知 $x-1<[x]\le x$ $3x-1<[3x]\le 3x$ 兩式相加得 $4x-2<[x]+[3x]\le 4x \Rightarrow 4x-2<5\le 4x$， 解得 $\frac{5}{4}\le x<\frac{7}{4}$

4. （16分）從一個 $n\times n$ 的方格紙中，隨機選取兩條相異縱線與兩條相異橫線，使其圍成一個矩形，

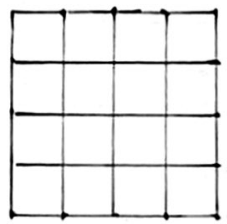
$\frac{1}{9}$ 令隨機變數 X_n 表示所圍出的矩形面積，$E(X_n)$ 表示 X_n 的期望值，試求 $\lim_{n\to\infty}\frac{E(X_n)}{n^2}$ 之值

$(n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

peter0210

$\boxed{4}$

ex: n=4



列差	個數	行差
1	4	1
2	3	2
3	2	3
4	1	4

所有矩形面積和

$(1\times4+2\times3+3\times2+4\times1)(\sim)$

列 行

$\left(\sum_{k=1}^{n}k(n+1-k)\right)^2/(C_2^{n+1})^2\cdot n^2$

$$\left(\frac{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}}{\frac{n(n+1)}{2}\cdot n}\right)^2\to\frac{1}{9}$$

5. （16分）已知坐標平面上有兩定點 $A(-1,2)$、$B(1,4)$，以及 x 軸上的一動點 P，

$\boxed{5}$ 法1: 當 $\angle APB$ 有最大值時，試求 P 點坐標。

令 $P(t,0)$

$$\tan\theta=\frac{\frac{-2}{t+1}-\frac{-4}{t-1}}{1+\frac{-2}{t+1}\cdot\frac{-4}{t-1}}=2\cdot\left(\frac{t+3}{t^2+7}\right)\overset{令}{=}k$$

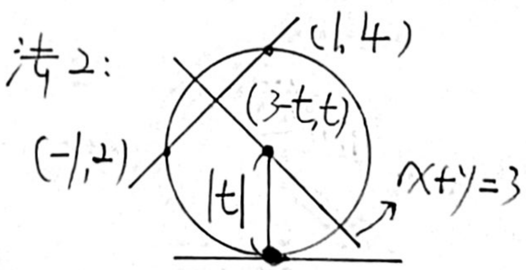
$kt^2-t+7k-3=0$

$D\geq0\Rightarrow 28k^2-12k-1\leq0$

$\begin{matrix}14 & +1\\ 2 & -1\end{matrix}\Rightarrow -\frac{1}{14}\leq k\leq\frac{1}{2}$

$t^2-2t+1=0\Rightarrow P(1,0)$

法2:



$t^2=(t-4)^2+(2-t)^2$

$\Rightarrow t^2-12t+20=0$

$\Rightarrow t=2$ or 10

$\Rightarrow P(1,0)$