

陸、筆試試題及參考解答

113 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

筆試試題（一）

注意事項：

1. 時間分配：2 小時(13:30~15:30)。
2. 配分：每題皆為 7 分。
3. 不可使用計算機。

1、已知實數 c 與 k 滿足 $c(c+2k) \neq 0$ 且 $c(c+k) \geq 0$ 。

- (1) 證明：存在實係數多項式 $P(x)$ 使得 $P(0)=k$ ，且對所有的實數 x ，
都滿足

$$(P(x+c)+c)(P(x-c)+c)=(P(x))^2. \dots\dots\dots(\star)$$

- (2) 當 $(c,k)=(1,2024)$ 時，求所有滿足條件 $(\star)$ 的實係數多項式 $P(x)$ 。

2、證明：存在一個長寬都是大於 2024 的整數的矩形，不能被 4×4 與 5×5 的拼片拼滿。(假設兩種拼片皆無限量供應)。

3、設 $\triangle ABC$ 為平面上的銳角三角形，點 D 為 $\overline{AC}$ 的中點， P 為 $\overline{BD}$ 上一點，
使得 $\triangle BAP$ 的外接圓 Γ 與 $\overline{AD}$ 再交於另一點 M ，且 $\overline{DC}$ 上有一點 N ，滿足
 $\overline{PM} = \overline{PN}$ 。令圓 Ω 為 $\triangle NAP$ 的外接圓，且 Ω 在點 A 的切線與 $\overline{BC}$
的交點為 Q ($Q \neq B$)，而 Q 點恰落在圓 Γ 上。

- (1) 試證： $\overline{BA} = \overline{BC}$ 。

- (2) 設直線 AB 與圓 Ω 再交於點 X ($X \neq A$)，直線 NP 與圓 Γ 再交於
點 Y ($Y \neq P$)，且直線 AQ 與 $\overline{BD}$ 交於點 Z 。試證：直線 CZ 與三角形 PXY
的外接圓相切。

113 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

筆試試題 (一)【參考解答】

1. 【參考解答】

[解法一]

(1) 我們將證明存在二次多項式 $P(x)$ 使得 $P(0) = k$ 且滿足條件(★)。

事實上，若 $\deg P = 2$ ， $P(0) = k$ ，且滿足條件(★)，則

$$P(x) = \frac{x^2}{c} \pm 2\sqrt{\frac{c+k}{c}}x + k. \quad (\#)$$

(#) 的證明：令 $P(x) = ax^2 + bx + k$ ，其中 $a \neq 0$ 。由條件(★)可得到

$$\begin{aligned} & [a(x+c)^2 + b(x+c) + k + c][a(x-c)^2 + b(x-c) + k + c] \\ & \quad = (ax^2 + bx + k)^2 \\ \Rightarrow & [ax^2 + (2ac+b)x + (ac^2 + bc + c + k)][ax^2 + (-2ac+b)x \\ & \quad + (ac^2 - bc + c + k)] \\ & \quad = a^2x^4 + 2abx^3 + (2ak + b^2)x^2 + 2bkx + k^2. \end{aligned}$$

顯然，等號兩邊 x^4 、 x^3 項的係數相等，分別比較 x^2 、 x 項及常數項

係數可得到

$$\begin{aligned} & 2a(ac^2 + c + k) + (2ac + b)(-2ac + b) = 2ak + b^2 \\ & \quad \Rightarrow 2ac(ac - 1) = 0; \\ (2ac + b)(ac^2 - bc + c + k) + (-2ac + b)(ac^2 + bc + c + k) & = 2bk \\ & \quad \Rightarrow bc(1 - ac) = 0; \\ (ac^2 + bc + c + k)(ac^2 - bc + c + k) & = k^2 \\ & \quad \Rightarrow (ac^2 + c + 2k)(ac + 1) = b^2c. \end{aligned}$$

既然 $ac \neq 0$ ，整理後可得到 $a = \frac{1}{c}$ ， $b^2 = \frac{4(c+k)}{c} \geq 0$ 。

綜上所述，我們得到所有滿足條件(★)的二次多項式必為(#)

的形式。這證明了存在性。

(2) 當 $(c, k) = (1, 2024)$ 時，我們將證明滿足條件(★)的多項式只有

$$P(x) = x^2 \pm 90x + 2024 = (x \pm 45)^2 - 1.$$

證明如下：

當 $(c, k) = (1, 2024)$ 時，條件(★)變成

$$(P(x+1)+1)(P(x-1)+1) = (P(x))^2.$$

※直接檢驗知當 $\deg P(x) = 0$ 或 1 時， $P(x)$ 不可能滿足條件(★)。

※若 $\deg P(x) = n \geq 2$ ，令 $P(x)$ 的 x^n 項係數為 $a \neq 0$ 。

設 $Q(x) = P(x) + 1$ 。則 Q 滿足

$$Q(x+1)Q(x-1) = (Q(x))^2 - 2Q(x) + 1.$$

為了方便處理上式，我們再考慮 $R(x) = Q(x+1) - Q(x)$ ，則

$$Q(x-1) = Q(x) - R(x-1)。$$
 整理後可得到

$$Q(x)(R(x) - R(x-1) + 2) - R(x)R(x-1) = 1. \quad (\#\#)$$

既然 $Q(x) = ax^n + \dots$ ，我們可直接得到

■ $\deg R(x) = n-1$ ，且 $R(x)$ 的 x^{n-1} 項係數為 na 。

■ $\deg(R(x) - R(x-1)) = n-2$ ，且 $R(x) - R(x-1)$ 的 x^{n-2} 項係數

為 $n(n-1)a$ 。注意到，當 $n \geq 3$ 時，由(##)可得到 $Q(x)(R(x) -$

$R(x-1) + 2) - R(x)R(x-1)$ 的 x^{2n-2} 項係數為 $n(n-1)a^2 -$

$(na)^2 = 0 \Rightarrow n = 0$ ，矛盾！故只剩唯一一種可能： $n = 2$ ，再將

$(c, k) = (1, 2024)$ 代入(＃)可得到所有的解 $P(x) = x^2 \pm 90x +$

2024。

[解法二] (2) 小題的暴力展開法：

在這個方法裡，我們只針對 $\deg P = n \geq 1$ 的情況。由條件，令

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + 2024 \quad (a_n \neq 0). \text{ 已知其滿足 } (P(x))^2 - P(x+1)P(x-1) = P(x+1) + P(x-1) + 1.$$

我們必須對每個多項式按降冪展開至第三項(因為 $(P(x))^2$ 與

$P(x+1)P(x-1)$ 的前兩項會完全消掉)：

$$(P(x))^2 = a_n^2 x^{2n} + 2a_n a_{n-1} x^{2n-1} + (2a_n a_{n-2} + a_{n-1}^2) x^{2n-2} + \cdots.$$

由二項式定理可得到

$$\begin{aligned} P(x+1) &= a_n x^n + (na_n + a_{n-1})x^{n-1} \\ &\quad + \left(\frac{n(n-1)}{2} a_n + (n-1)a_{n-1} + a_{n-2} \right) x^{n-2} + \cdots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x-1) &= a_n x^n + (-na_n + a_{n-1})x^{n-1} \\ &\quad + \left(\frac{n(n-1)}{2} a_n - (n-1)a_{n-1} + a_{n-2} \right) x^{n-2} + \cdots. \end{aligned}$$

因此，我們得到 $(P(x))^2 - P(x+1)P(x-1) = na_n^2 x^{2n-2} + \cdots$ 及

$P(x+1) + P(x-1) = 2a_n x^n + 2a_{n-1} x^{n-1} + \cdots$. 代入所給定的條件並

比較係數可得到 $2n-2 = n$ 且 $na_n^2 = 2a_n \Rightarrow n = 2, a_n = 1$. 接下來

同解一，在此省略。

2. 【參考解答】

對任意 $n, m \in \mathbb{N}$ ，考慮 $(4n+1) \times (5m+1)$ 的矩形，底下證明這個矩形不可能被 4×4 與 5×5 的拼片拼滿。將各列由第一列開始每列塗一個顏色，依次塗四個顏色 $A, B, C, D, A, B, C, D, \dots$ 則 A 多塗了一列，即多塗了 $5m+1$ 格，每一塊 4×4 的拼片覆蓋各個顏色 4 格，每一塊 5×5 的拼片覆蓋某種顏色 10 格，其他顏色 5 格，因此若能完全覆蓋，任兩種顏色覆蓋的方格之差應該是 5 的倍數，這和 $5m+1$ 矛盾。

3. 【參考解答】

(1) 由於 Q 為圓 Γ 、圓 Ω 的切線 $\overline{AQ}$ 與直線 BC 的共同交點，故有：

$$\begin{aligned}\angle QBP &= \angle QAP = \angle ANP \text{ (弦切角)} = \angle PMN \text{ (}\because PM = PN\text{)} \\ &= 180^\circ - \angle AMP = \angle PBA.\end{aligned}$$

此即中線 $\overline{BD}$ 為 $\angle B$ 的角平分線。故三角形 ABC 為等腰三角形， $\angle B$ 為頂角， $\overline{BA} = \overline{BC}$ 。

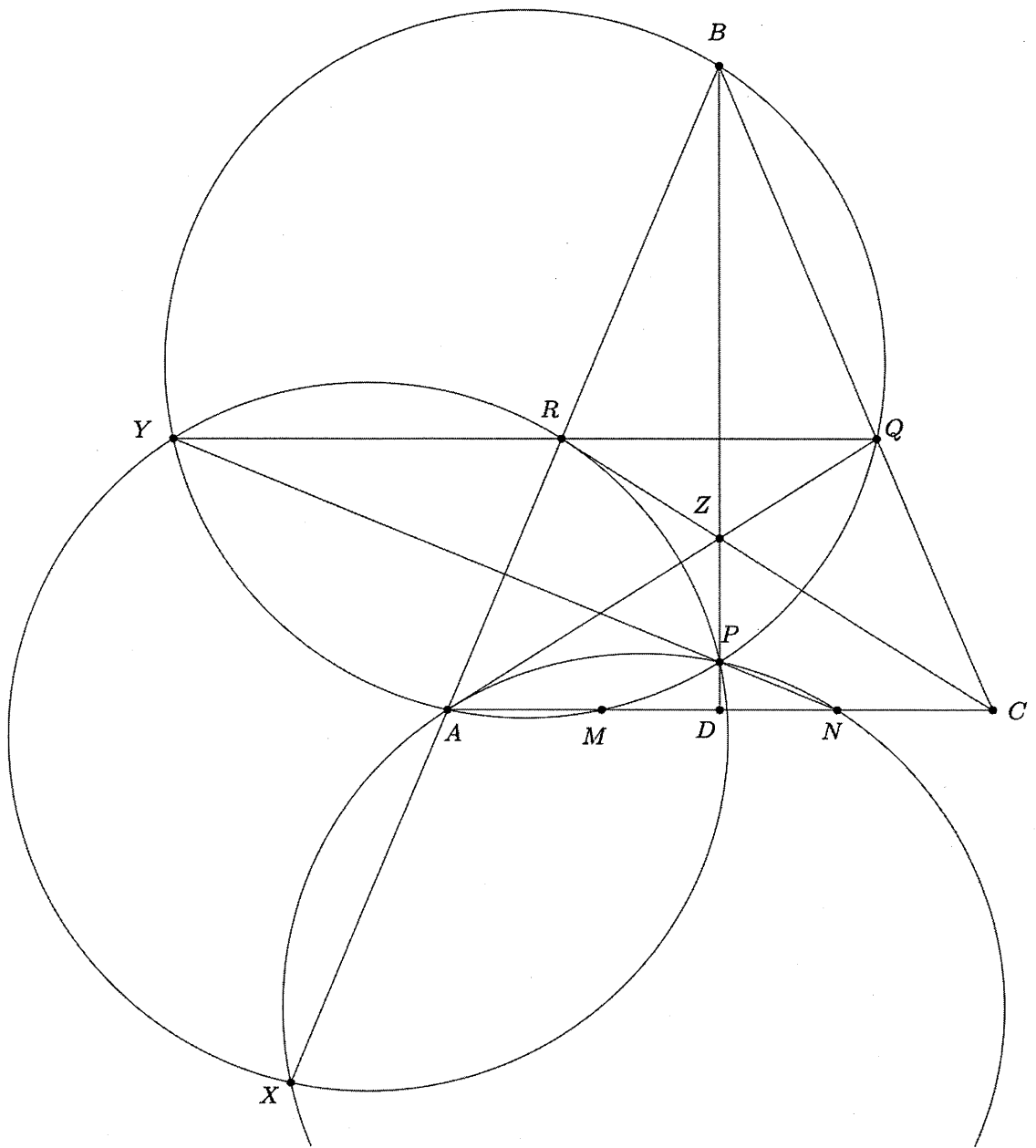
(2) 首先，

$$\angle YNA = \angle PNA = \angle QAP = \angle QYP = \angle QYN, \text{ 所以 } QY \parallel AN \text{ (內錯角相等)}。$$

因此 Q 點對於直線 BD 的對稱點 R 落在直線 QY 、 AB 上。由於 AZQ 共線，關於 BD 對稱後有 CZR 共線。

於是 $\angle RYP = \angle ANP = \angle AXP = \angle RXP$ ，故 $RYXP$ 共圓。

最後， $\angle CRP = \angle AQP = 180^\circ - \angle AMP = \angle PNA = \angle PYR$ ，因此直線 CZ 與三角形 PXY 的外接圓切於點 R (弦切角性質)。



113 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

筆試試題 (二)

注意事項：

1. 時間分配：2 小時(16:00~18:00)。
2. 配分：每題皆為 7 分。
3. 不可使用計算機。

1、設 n 為大於 1 的正整數， $a_1, a_2, \dots, a_n$ 為 n 個不全為 0 的實數，滿足

$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ ，且對任意滿足 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ 的 n 個整數

$x_1, x_2, \dots, x_n$ 而言，都有 $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$ 為一整數。求

$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ 的最小值。(以 n 表示)

2、三角形 ABC 的三邊 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 、 $\overline{AB}$ 上，分別有 D 、 E 、 F 三點，使得

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{1}{2}。已知 \overline{AD} 和 \overline{CF} 交於 A'，\overline{BE} 和 \overline{AD} 交於 B'，\overline{CF}$$

和 $\overline{BE}$ 交於 C' ，且 $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ 。證明： $\triangle ABC$ 為正三角形。

3、令 S_n 為前 n 個正整數的總和。當正整數 m, n 滿足 $m+n \geq 1234$ 時，求函數

$f(m, n) = |2S_n - S_m - 124|$ 的最小值，以及可得到最小值的一組 (m, n) 。

113 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

筆試試題（二）【參考解答】

1. 【參考解答】

設 $b_i = [a_i]$, $c_i = a_i - b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。取 $x_i = 1$, $x_j = -1$, 其中 $1 \leq i < j \leq n$, 可

知 $(b_i - b_j) + (c_i - c_j)$ 為一整數, 故 $c_i = c_j$, 亦即每個 a_i 的小數部分都相同, 設

其為 α 。因為 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$, 所以 $(b_1 + b_2 + \dots + b_n) + n\alpha = 0$, 也就是

$n\alpha = -(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$ 是一個整數。因此 $\alpha = \frac{k}{n}$, 其中 $0 \leq k \leq n-1$ 為一整數,

且 $b_1 + b_2 + \dots + b_n = -n\alpha = -k$ 。

現在計算平方和：

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \sum_{i=1}^n \left(b_i + \frac{k}{n} \right)^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2 + \frac{2k}{n} \sum_{i=1}^n b_i + n \cdot \frac{k^2}{n^2} = \sum_{i=1}^n b_i^2 - \frac{2k^2}{n} + \frac{k^2}{n} = \sum_{i=1}^n b_i^2 - \frac{k^2}{n}$$

若 $k \neq 0$, 由柯西不等式, 可知 $\sum_{i=1}^n b_i^2$ 的最小可能值發生在向量 $(b_1, b_2, \dots, b_n)$

與 $(1, 1, \dots, 1)$ 的夾角最小處, 即：有 k 個 b_i 為 -1 , 其它為 0 , 此時

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2 - \frac{k^2}{n} = k \cdot (-1)^2 - \frac{k^2}{n} = \frac{k(n-k)}{n}。在 $k = 1, 2, \dots, n-1$ 之中, 其最小$$

值發生在 $k = 1, n-1$ 處, 此為 $\frac{n-1}{n}$ 。

當 $k = 0$ 時, 每一個 a_i 都是整數, 但不全為 0 而總和為 0 , 故最小可能值為

$$1^2 + (-1)^2 = 2。$$

綜上, 所求最小值為 $\frac{n-1}{n}$ 。

2. 【參考解答】

$\because \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC, \therefore \angle B'A'C' = \angle BAC$ ，又 $\angle B'A'C' = \angle A'AC + \angle ACF$ ，

$\angle BAC = \angle A'AC + \angle BAD$ ， $\therefore \angle ACF = \angle BAD$ 。同理可得 $\angle BAD = \angle CBE$ 。

不妨設 $\theta = \angle BAD = \angle CBE = \angle ACF$ 令 $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b, \overline{AB} = c$,

由餘弦定理

$$\begin{aligned}\overline{BE}^2 &= \overline{CE}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{CE} \cdot \overline{BC} \cos \angle BCE \\ &= \left(\frac{b}{3}\right)^2 + a^2 - 2 \cdot \frac{b}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{b^2}{9} + a^2 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{3} \\ &= \frac{1}{9}(6a^2 - 2b^2 + 3c^2) \quad (*)\end{aligned}$$

注意到 $\triangle EBC$ 的面積 $= \frac{1}{3} \triangle ABC$ 的面積，且 $\triangle EBC$ 的面積
 $= \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{BE} \cdot \sin \theta$.

所以容易得知 $\overline{BC} \cdot \overline{BE} = \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \overline{AD}$ 。再者，由(*)易知

(令 $a^2 = x, b^2 = y, c^2 = z$)

$$\overline{BE}^2 \cdot \overline{BC}^2 = \frac{1}{9}(6a^2 - 2b^2 + 3c^2) \cdot a^2 = \frac{x}{9}(6x - 2y + 3z).$$

同理可得

$$\overline{CF}^2 \cdot \overline{CA}^2 = \frac{y}{9}(6y - 2z + 3x), \overline{AD}^2 \cdot \overline{AB}^2 = \frac{z}{9}(6z - 2x + 3y).$$

由 $\overline{BE}^2 \cdot \overline{BC}^2 = \overline{CF}^2 \cdot \overline{CA}^2$ 可知 $x(6x - 2y + 3z) = y(6y - 2z + 3x)$

整理可得 $z(3x + 2y) = 6y^2 + 5xy - 6x^2 = (2y + 3x)(3y - 2x)$ ，於是有

$z = -2x + 3y$ 同理有 $x = -2y + 3z, y = -2z + 3x$ ，易得 $x = y = z$ ，

即 $a = b = c$ 。 $\therefore \triangle ABC$ 為正三角形。

3. 【參考解答】

當 $m+n \geq 1234$ 時， $f(m,n)$ 的最小值為 2，達到最小值的 (m,n) 有無窮多組， $(m,n) = (2055, 1453)$ 為其中一組，證明如下：

首先，我們有 $f(m,n) = |2S_n - S_m - 124| = \frac{1}{8} |2(2n+1)^2 - (2m+1)^2 - 993|$.

第一步：我們先證明必有 $f(m,n) \geq 2, \forall m, n \in \mathbb{N}$. 證明如下：

一、 $2S_n - S_m \neq 124, \forall m, n \in \mathbb{N}$.

(證明) 若存在 $n, m \in \mathbb{N}$ 使得 $2S_n - S_m = 124$ ，則 $2(2n+1)^2 - (2m+1)^2 = 993$. 故 $3|2(2n+1)^2 - (2m+1)^2 \Rightarrow 3|(2n+1)^2 + (2m+1)^2 \Rightarrow 3|2n+1$ 且 $3|2m+1$. 因此，我們得到 $9|2(2n+1)^2 - (2m+1)^2 = 993$ ，但這是不可能的。

二、 $2S_n - S_m \neq 123, \forall m, n \in \mathbb{N}$.

(證明) 若存在 $n, m \in \mathbb{N}$ 使得 $2S_n - S_m = 123$ ，則 $2(2n+1)^2 - (2m+1)^2 = 985$. 故 $5|2(2n+1)^2 - (2m+1)^2$. 注意到整數的平方除以 5 的餘數只有 0、1、4 這三種可能，可得到 $5|2n+1$ 且 $5|2m+1 \Rightarrow 25|2(2n+1)^2 - (2m+1)^2 = 985$ ，顯然不成立！

三、 $2S_n - S_m \neq 125, \forall m, n \in \mathbb{N}$.

(證明) 若存在 $n, m \in \mathbb{N}$ 使得 $2S_n - S_m = 125$ ，則 $2(2n+1)^2 - (2m+1)^2 = 1001 = 7 \times 11 \times 13$. 故 $11|2(2n+1)^2 - (2m+1)^2$. 注意到整數的平方除以 11 的餘數只有 0、1、4、9、5、3 這六種可能。我們必得到 $11|2n+1$ 且 $11|2m+1 \Rightarrow 121|2(2n+1)^2 - (2m+1)^2 = 1001$ ，不可能！

由上得到 $2S_n - S_m \notin \{123, 124, 125\}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$, 因此 $f(m, n) \geq 2$. (以上累計 2 分)

第二步：當 $m = 4, n = 11$ 時， $2S_n - S_m = 132 - 10 = 122$ ，即 $f(4, 11) =$

2。(以上累計 3 分，但無第一步，只給出 $f(4, 11) = 2$ 的例子不給分) 我們

將利用這資訊找出一組正整數 m, n 滿足 $m + n \geq 1234$ 使得 $2S_n - S_m =$

122，它等價於 Pell 方程

$$(2m + 1)^2 - 2(2n + 1)^2 = -977.$$

既然 $2m + 1 = 9, 2n + 1 = 23$ 為一解，這也給出等式

$$(9 + 23\sqrt{2})(9 - 23\sqrt{2}) = -977.$$

另一方面，注意到 $(3 + 2\sqrt{2})^{k-1}(3 - 2\sqrt{2})^{k-1} = 1, \forall k \in \mathbb{N}$. 由二項式定理可得到

$$(3 + 2\sqrt{2})^{k-1} = a_k + b_k\sqrt{2}, (3 - 2\sqrt{2})^{k-1} = a_k - b_k\sqrt{2}, \text{ 其中 } a_k, b_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

會滿足 $a_k^2 - 2b_k^2 = 1$. 顯然 a_k 必為奇數， b_k 必為偶數，且

$$a_k = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^{k-1} + (3 - 2\sqrt{2})^{k-1}}{2},$$

$$b_k = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^{k-1} - (3 - 2\sqrt{2})^{k-1}}{2\sqrt{2}}. \quad (*)$$

均為嚴格遞增。所以，我們可整理得到

$$\begin{aligned} -977 &= (9 + 23\sqrt{2})(a_k + b_k\sqrt{2})(9 - 23\sqrt{2})(a_k - b_k\sqrt{2}) \\ &= (9a_k + 46b_k)^2 - 2(23a_k + 9b_k)^2. \end{aligned}$$

綜上所述，滿足 $2S_n - S_m = 122$ 有無窮多組解：

$$m = \frac{9a_k + 46b_k - 1}{2}, n = \frac{23a_k + 9b_k - 1}{2} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

利用(*)直接計算可得到

$$\begin{aligned}(a_1, b_1) &= (1, 0) \Rightarrow (m, n) = (4, 11), \\(a_2, b_2) &= (3, 2) \Rightarrow (m, n) = (59, 43), \\(a_3, b_3) &= (17, 12) \Rightarrow (m, n) = (352, 249), \\(a_4, b_4) &= (99, 70) \Rightarrow (m, n) = (2055, 1453) \dots\end{aligned}$$

(在此不必討論是否找到所有的正整數解，也省略用遞迴數列來處理 m, n

之值。)顯然， $(m, n) = (2055, 1453)$ 滿足條件！

柒、口試試題及參考解答

口 試 題

1. 設集合 S 同時滿足以下三個條件：

(i) S 中每個元素 a 都為正整數，且 $1 \leq a \leq 100$ ；

(ii) 對於任意 $a, b \in S (a \neq b)$ ，都存在 $c \in S (c \neq a, b)$ 使得

$$\gcd(a+b, c) = 1；$$

(iii) 對於任意 $a, b \in S (a \neq b)$ ，都存在 $d \in S (d \neq a, b)$ 使得

$$\gcd(a+b, d) > 1。$$

求 S 的元素個數的最大值。

2. 設集合 T 中的每個元素均為 3668^{50} 的正因數，且 T 中任意兩個數都不具有因數倍數的關係，求 T 中元素個數的最大值。

113 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

口試題【參考解答】

1. 【參考解答】

$|S|$ 的最大值為 50。

首先證明 $\max |S| \leq 50$ 。考慮

$$(1, 100), (2, 99), \dots, (50, 51).$$

若 $\max |S| \geq 51$ ，必包含某一組兩數 (a, b) ，其和為質數 $a + b = 101$ ，不

可能有 d 使得 $\gcd(a + b, d) > 1$ ，因此 $\max |S| \leq 50$ 。

底下構造 $|S| = 50$ 的集合：取

$$S = \{2, 1, 3, 5, 7, \dots, 97\}。$$

檢驗符合條件即可：

若 $(a, b) = (2, 1)$ 或 $(2, 97)$ ，取 $c = 5, d = 3$ 。

若 $(a, b) = (2, b)$ ， $b = 3, 5, 7, \dots, 95$ ，則取 $c = 1, d = b + 2$ 。

若 $(a, b) = (1, \text{odd})$ ，則取 c 為最靠近 b 的奇質數， $d = 2$ 。

若 $(a, b) = (\text{odd}, \text{odd})$ ， $a, b = 3, 5, 7, \dots, 97$ ，則取 $c = 1, d = 2$ 。

2. 【參考解答】

觀察 $3668^{50} = (2^2 \cdot 7 \cdot 131)^{50} = 2^{100} \cdot 7^{50} \cdot 131^{50}$

設 $T = \{2^{100-a-b} 7^a 131^b \mid 0 \leq a, b \leq 50, a, b \in \mathbb{N}\}$,

則 T 中共有 $51^2 = 2601$ 個元素。

若集合 T 中 $2^{100-i-j} \cdot 7^i \cdot 131^j$ 是 $2^{100-k-l} \cdot 7^k \cdot 131^l$ 的因數

則 $100-i-j \leq 100-k-l$, $i \leq k$, $j \leq l$ 。

即 $i+j \geq k+l$ 且 $i+j \leq k+l$, 因此 $i=k$, $j=l$ 。

故 T 中任意兩個數都不具因數倍數關係。

設集合 S 為滿足條件且其元素個數大於 2601。

因為 (a, b) 的取值只有 2601 種, 因此 S 中一定含有兩個元素 $k_1 = 2^{c_1} \cdot$

$7^{a_1} \cdot 131^{b_1}$ 與 $k_2 = 2^{c_2} \cdot 7^{a_2} \cdot 131^{b_2}$, 且 $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, 但 $c_1 \neq$

c_2 , 即 $c_1 > c_2$ 或 $c_1 < c_2$, 故 k_1 和 k_2 具有因倍數關係, 因而 S 不存

在。

所以 T 中元素個數的最大值為 2601。

113 學年度高級中學數學能力競賽決賽

口試程序表

考生 順序	編號	口試預備	口試 A
		21210 教室	21216 教室
1	11305	08:40	09:10-09:30
4	11348	09:00	09:30-09:50
7	11331	09:20	09:50-10:10
休息			
10	11340	10:00	10:30-10:50
13	11315	10:20	10:50-11:10
16	11307	10:40	11:10-11:30
19	11347	11:00	11:30-11:50
午休			
22	11332	13:00	13:30-13:50
25	11311	13:20	13:50-14:10

考生 順序	編號	口試預備	口試 B
		21210 教室	21310 教室
2	11301	08:40	09:10-09:30
5	11316	09:00	09:30-09:50
8	11313	09:20	09:50-10:10
休息			
11	11336	10:00	10:30-10:50
14	11351	10:20	10:50-11:10
17	11329	10:40	11:10-11:30
20	11323	11:00	11:30-11:50
午休			
23	11328	13:00	13:30-13:50
26	11314	13:20	13:50-14:10

考生 順序	編號	口試預備	口試 C
		21210 教室	21402 教室
3	11330	08:40	09:10-09:30
6	11320	09:00	09:30-09:50
9	11344	09:20	09:50-10:10
休息			
12	11335	10:00	10:30-10:50
15	11342	10:20	10:50-11:10
18	11303	10:40	11:10-11:30
21	11326	11:00	11:30-11:50
午休			
24	11339	13:00	13:30-13:50
27	11337	13:20	13:50-14:10

備註：口試流程

捌、獨立研究試題及參考解答

113 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

獨立研究試題（一）

注意事項：

1. 時間分配：1.5 小時(8:30~10:00)。
 2. 配分：每題皆為 7 分。
 3. 不可使用計算機。
-

1、已知方程式 $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ 有三實根 a, b, c ，其中 $a > b > c$ 。試求

$a^2b + b^2c + c^2a$ 的值。

2、設 f 是由非負實數對應至非負實數的函數，且滿足下列條件：

- (i) 對任意的非負實數 x 與 y ， $f(x+y) = f(xf(y))f(y)$ 皆成立；
- (ii) $f(1) = 0$ ；
- (iii) 若 $0 \leq x < 1$ ，則 $f(x) \neq 0$ 。

試求所有滿足條件的函數 f 。

113 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

獨立研究試題 (二)

注意事項：

1. 時間分配：1.5 小時(10:20~11:50)。
 2. 配分：每題皆為 7 分。
 3. 不可使用計算機。
-

1、是否存在一個鈍角三角形 ABC ，我們可以在其內部找到一點 P ，使得

$\tan \angle PAB, \tan \angle PBC, \tan \angle PCA$ 三數均不小於 $\frac{1}{2}$ ？請證明你的結論。

2、設 x, y, z 為兩兩互質的正整數，且滿足 $x^2 + 3y^2 = z^2$ 和

$$x + y + z = 2024,$$

求 (x, y, z) 。

113 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

獨立研究（一）【參考解答】

1. 【參考解答】

令 $S_1 = a^2b + b^2c + c^2a$ ， $S_2 = ab^2 + bc^2 + ca^2$ 。有 $a + b + c = -3$ ，

$ab + bc + ca = 0$ ， $abc = 1$ 。由這些關係可以知道 $a > 0 > b > c$ （一正根兩負

根），因此 $S_2 = ab^2 + bc^2 + ca^2 < ab^2 + b^2c + ca^2 = b(ab + bc) + ca^2$

$= b(-ca) + ca^2 = ca(a - b) < 0$ 。

以下證明： $S_1 + S_2 = -3$ ， $S_1 S_2 = -18$ ，因此可得 $S_1 = 3$ ， $S_2 = -6$ 。

$S_1 + S_2 = a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 = (a + b + c)(ab + bc + ca) - 3abc = -3$

，而 $S_1 \cdot S_2 = abc(a^3 + b^3 + c^3) + 3a^2b^2c^2 + (a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3)$ 。為此計算

a^3, b^3, c^3 滿足的三次方程式：令 $x = \sqrt[3]{t}$ 代入原方程式可得 $t - 1 = -3t^{2/3}$ 。

兩邊同時立方後整理可得 $t^3 + 24t^2 + 3t - 1 = 0$ ，

此即為 a^3, b^3, c^3 滿足的三次方程式。由此得 $a^3 + b^3 + c^3 = -24$ ，

$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = 3$ 。所以 $S_1 \cdot S_2 = 1 \cdot (-24) + 3 \cdot 1^2 + 3 = -18$ 。

2. 【參考解答】

設 $x \geq 0$ 且 $y = 1$ ，由條件 1 與 2 可得 $f(x+1) = f(xf(1))f(1) = 0$ ，所以，若 $x \geq 1$ ，則 $f(x) = 0$ 。

設 $1 > y \geq 0$ 且 $x = 1 - y$ ，由條件 1 與 2 可得

$$0 = f(1) = f((1-y)f(y))f(y)。$$

由條件 3 可知 $f(y) \neq 0$ 。所以可得 $f((1-y)f(y)) = 0$ 。再由條件 3 可知 $(1-y)f(y) \geq 1$ ，故可知 $f(y) \geq \frac{1}{1-y}$ 。

接下來證明若 $0 \leq y < 1$ ，則 $f(y) = \frac{1}{1-y}$ 。

設 $x = y = 0$ ，由條件 1 可得 $f(0) = f(0)f(0)$ 。由條件 3 可知 $f(0) = 1 = \frac{1}{1-0}$ 。若存在 $0 < y < 1$ ，使得 $f(y) > \frac{1}{1-y}$ ，可取 $0 < x < 1 - y$ ，使得

$xf(y) > 1$ 。所以可知 $f(xf(y)) = 0$ 。

由條件 1 可得 $f(x+y) = f(xf(y))f(y) = 0$ 。

但因 $x+y < 1$ ，由條件 3 可知 $f(x+y) \neq 0$ ，故得出矛盾。

整理可得， $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & \text{if } 0 \leq x < 1; \\ 0, & \text{if } x \geq 1. \end{cases}$

113 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

獨立研究（二）【參考解答】

1. 【參考解答】

令 $t_m = \min\{\tan \angle PAB, \tan \angle PBC, \tan \angle PCA\} \geq \frac{1}{2}$. 為方便起見，再令

$\overline{BC} = a, \overline{CA} = b, \overline{AB} = c, \overline{PA} = x, \overline{PB} = y, \overline{PC} = z, \angle PAB = \alpha,$
 $\angle PBC = \beta, \angle PCA = \gamma.$

我們對內部三個三角形 PAB, PBC, PCA 適當地應用餘弦定理可得到

$$\begin{aligned} y^2 &= x^2 + c^2 - 2xc \cos \alpha, & z^2 &= y^2 + a^2 - 2ya \cos \beta, \\ x^2 &= z^2 + b^2 - 2zb \cos \gamma. \end{aligned}$$

將上列三個式子相加整理後，得到

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2xc \cos \alpha + 2ya \cos \beta + 2zb \cos \gamma.$$

另一方面，由 $t_m \geq \frac{1}{2}$ 知 $0 < \cos \alpha \leq 2 \sin \alpha, 0 < \cos \beta \leq 2 \sin \beta, 0 < \cos \gamma \leq 2 \sin \gamma.$

這給出 $a^2 + b^2 + c^2 \leq 4xc \sin \alpha + 4ya \sin \beta + 4zb \sin \gamma = 8S$, 這裡的 S

為三角形 ABC 的面積。

接下來我們要證明三角形 ABC 不可能是鈍角三角形。

若不然，不失一般性，我們令 $\angle ABC > 90^\circ$.

則 $b^2 > a^2 + c^2$ 且 $S < \frac{1}{2}ac$, 而這給出

$$2(a^2 + c^2) < a^2 + b^2 + c^2 \leq 8S < 4ac \Rightarrow (a - c)^2 < 0$$

這個矛盾證明了三角形 ABC 不可能是鈍角三角形。

2. 【參考解答】

將 $x^2 + 3y^2 = z^2$ 移項成 $z^2 - x^2 = 3y^2$

即 $(z+x)(z-x) = 3y^2$ ，因為 z, x 互質，所以 $z-x$ 和 $z+x$ 的最大公因數必為 1 或 2。

$$(1) z+x \text{ 和 } z-x \text{ 互質，此時可設 } \begin{cases} z+x=3u^2 \\ z-x=v^2 \end{cases} \quad \text{其中 } u, v \text{ 互質，且 } 3 \nmid v。$$

$$\text{或 } \begin{cases} z+x=u^2 \\ z-x=3v^2 \end{cases} \quad \text{其中 } u, v \text{ 互質，且 } 3 \nmid u$$

$$(i) \begin{cases} z+x=3u^2 \\ z-x=v^2 \end{cases} \quad (u, v)=1, \quad 3 \nmid v$$

此時 $z = \frac{3u^2 + v^2}{2}$, $x = \frac{3u^2 - v^2}{2}$, $y = uv$ 。顯然 u, v 皆為奇數，且 $3u^2 > v^2$ 。因為

$x + y + z = 2024$ ，所以 $3u^2 + uv = 2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ ，即 $u(3u + v) = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ 。

u 可能為 1, 11, 23, 11·23，但 $3u^2 > v^2$ ，易知 $u = 23, v = 19$ ，此時

$(x, y, z) = (613, 437, 974)$ 。

$$(ii) \begin{cases} z+x=u^2 \\ z-x=3v^2 \end{cases} \quad (u, v)=1, \quad 3 \nmid u$$

此時 $z = \frac{u^2 + 3v^2}{2}$, $x = \frac{u^2 - 3v^2}{2}$, $y = uv$ 。顯然 u, v 皆為奇數，且 $u^2 > 3v^2$ ，因

為 $x + y + z = 2024$ ，所以 $u(u + v) = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ ， u 可能為 1, 11, 23, 11·23，但

$u^2 > 3v^2$ ，易知皆不合。

(2) $z+x$ 和 $z-x$ 的最大公因數為 2.

$$(i) \begin{cases} z+x=6u^2 \\ z-x=2v^2 \end{cases} \quad (u,v)=1, \quad 3 \nmid v$$

此時 $z=3u^2+v^2$, $x=3u^2-v^2$, $y=2uv$, 因為 $x+y+z=2024$, 所以

$2u(3u+v)=2^3 \cdot 11 \cdot 23$, 即 $u(3u+v)=2^2 \cdot 11 \cdot 23$, 但 $3u^2 > v^2$, 易知皆不合。

$$(ii) \begin{cases} z+x=2u^2 \\ z-x=6v^2 \end{cases} \quad (u,v)=1, \quad 3 \nmid u$$

此時 $z=u^2+3v^2$, $x=u^2-3v^2$, $y=2uv$, 因為 $x+y+z=2024$, 所以

$2u(u+v)=2^3 \cdot 11 \cdot 23$, 即 $u(u+v)=2^2 \cdot 11 \cdot 23$ 但 $u^2 > 3v^2$, 易知皆不合。

綜合以上討論得 $(x,y,z)=(613,437,974)$ 。

玖、113 學年度各分區複賽試題及參考解答

113 學年度北一區 (花蓮高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試 (一) 試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 46 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一：證明以下兩個不等式對所有自然數 n 都成立。

$$(1) \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n+2}} < \frac{\sqrt{2n+2}}{\sqrt{2n+3}}。$$
$$(2) \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}。$$

(8 分)

問題二：已知 a, b, c 是正實數且滿足 $\frac{a^2}{1+a^2} + \frac{b^2}{1+b^2} + \frac{c^2}{1+c^2} = 1$ ，證明 $abc \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$ 。

(12 分)

《背面尚有試題》

問題三：試完成下面兩個問題。

(1) 已知 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 落在區間 $(0, \frac{\pi}{2})$ 內，求證

$$\sin(a_1 + a_2 + \dots + a_k) \leq \sin a_1 + \sin a_2 + \dots + \sin a_k。$$

(2) 已知 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ，證明 $\frac{1}{2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{k^2 \pi} \leq \frac{\pi}{6}$ 。

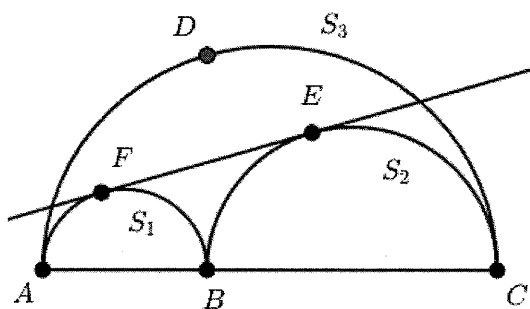
(12 分)

問題四：在線段 $\overline{AC}$ 上取點 B 異於點 A 與點 C ，以線段 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 為直徑在 $\overline{AC}$ 的

同一側做半圓 S_1, S_2, S_3 ，過點 B 做 $\overline{AC}$ 的垂直線交 S_3 於點 D 。 S_1 與 S_2 的公切線分別切這兩個半圓於點 F 與 E 。

(1) 證明：直線 $\overline{EF}$ 平行於 S_3 過點 D 的切線。(提示：過 $\overline{AB}$ 中點做 $\overline{EF}$ 的平行線)。

(2) 證明：四邊形 $BFDE$ 是一個矩形。



(14 分)

《試題結束》

113 學年度北一區 (花蓮高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試 (二) 試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共八題填充題，每題 3 分，滿分為 24 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案依序填寫在答案欄內。

1. 若數列 $\langle x_n \rangle$ 的一般項為 $x_n = \frac{113^n}{n!}$ ，則此數列的最大項為_____ (一) _____。(以 x_n 表示)
2. 若函數 $f_n(x) = f(f(\cdots f(x)\cdots))$ ，即 n 個函數 f 的合成且 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ，則 $f_n(x) =$ _____ (二) _____。
3. 試求 $\cos(2x) + 3\sin x$ 的最大值為_____ (三) _____。
4. 一樓梯有 12 個階梯，每一步可以向上跨 1 階或 2 階，試問上樓梯的走法有_____ (四) _____種。
5. 若函數 $f(x) = x^2 + \frac{64}{x^2 + 4}$ 在 $x = a$ 時，有最小值 b ，則 $b - a^2 =$ _____ (五) _____。
6. 已知週期函數 $f(x)$ 滿足圖形分別對於兩條鉛直線 $x = a$ 與 $x = b$ ($b > a$) 都是對稱的有很多，而且他們都有一個共同的週期，求這個共同的週期為_____ (六) _____。
7. 若小明與小華約好晚上 6 點到 7 點間在七星潭見面，先到的人等候另一人 25 分鐘，25 分鐘等不到人就離開，則兩個人可以見到面的機率為_____ (七) _____。
8. 已知正實數 a, b, c 與實數 x, y, z 滿足 $a^x = b^y = c^z = \sqrt{5}$ 及 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -4$ ，求 $abc =$ _____ (八) _____。

《試題結束》

113 學年度北一區 (花蓮高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科口試試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本口試卷共二題，思考時間 19-20 分鐘；參賽者可先在空白紙上作答，口試時請攜帶作答紙應試，口試答辯時間 20 分鐘，並繳回作答紙。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的精確度。

【口試 1】

數列 $\langle x_n \rangle$ 滿足 $x_1 = \frac{1}{2}$ ， $x_{k+1} = x_k^2 + x_k$ ，求 $\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_{2024}+1}$ 的整數部份。

【口試 2】

求方程式 $\sin x = \log_{113} x$ 的實根個數。

《試題結束》

113 學年度北一區 (花蓮高中)

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試 (一) 試題&解答

問題一：證明以下兩個不等式對所有自然數 n 都成立。

$$(1) \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n+2}} < \frac{\sqrt{2n+2}}{\sqrt{2n+3}}。$$

$$(2) \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}。$$

(8 分)

【證明】

(1) 兩邊平方乘開 $4n^2 + 8n + 3 < 4n^2 + 8n + 4$ 即得。

(2) 用數學歸納法證明

$$n=1, \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ 成立。}$$

$$\text{假設 } n=k \text{ 成立，即 } \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}},$$

當 $n=k+1$ 時，

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2k+2}} < \frac{\sqrt{2k+2}}{\sqrt{2k+3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2k+2}} = \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$$

也成立。

所以對所有自然數 n 都成立。

問題二：已知 a, b, c 是正實數且滿足 $\frac{a^2}{1+a^2} + \frac{b^2}{1+b^2} + \frac{c^2}{1+c^2} = 1$ ，證明 $abc \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$ 。

(12 分)

【證明】

設 $a = \tan \alpha, b = \tan \beta, c = \tan \gamma$ ，其中 $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$ 。

因為 $\frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{\tan^2 \theta}{\sec^2 \theta} = \sin^2 \theta$ ，依題意有 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$ 。

由算幾不等式

$$2\sqrt{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} \leq \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1 - \sin^2 \gamma = \cos^2 \gamma$$

$$2\sqrt{\sin^2 \beta \sin^2 \gamma} \leq \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$

$$2\sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 \alpha} \leq \sin^2 \gamma + \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta$$

以上三式相乘得到 $8 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \leq \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma$

$$\tan^2 \alpha \tan^2 \beta \tan^2 \gamma \leq \frac{1}{8}, \text{ 得證 } abc \leq \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}。$$

問題三：試完成下面兩個問題。

(1) 已知 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 落在區間 $(0, \frac{\pi}{2})$ 內，求證

$$\sin(a_1 + a_2 + \dots + a_k) \leq \sin a_1 + \sin a_2 + \dots + \sin a_k。$$

(2) 已知 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ，證明 $\frac{1}{2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{k^2 \pi} \leq \frac{\pi}{6}$ 。

(12 分)

【證明】

(1) 對 a_1, a_2 範圍在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之間有

$$\sin(a_1 + a_2) = \sin a_1 \cos a_2 + \cos a_1 \sin a_2 \leq \sin a_1 + \sin a_2 \quad \text{所以}$$

$$\begin{aligned} \sin(a_1 + a_2 + \dots + a_k) &\leq \sin a_1 + \sin(a_2 + \dots + a_k) \leq \sin a_1 + \sin a_2 + \sin(a_3 + \dots + a_k) \\ &\leq \dots \leq \sin a_1 + \sin a_2 + \dots + \sin a_k \end{aligned}$$

(2) 對 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 的 θ 有 $\sin \theta \leq \theta$ ，所以

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{k^2 \pi} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi}{6}$$

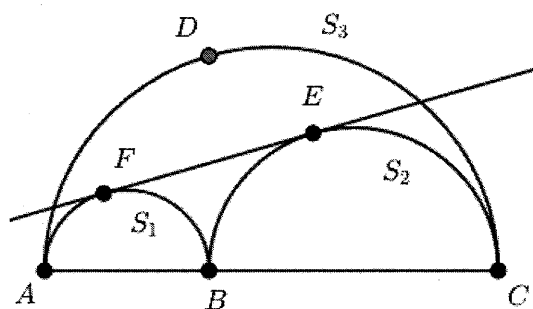
$$\text{又由(1)知 } \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{k^2 \pi} \geq \sin \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \pi} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}。$$

問題四：在線段 $\overline{AC}$ 上取點 B 異於點 A 與點 C ，以線段 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 為直徑在 $\overline{AC}$ 的

同一側做半圓 S_1, S_2, S_3 ，過點 B 做 $\overline{AC}$ 的垂直線交 S_3 於點 D 。 S_1 與 S_2 的公切線分別切這兩個半圓於點 F 與 E 。

(1) 證明：直線 $\overline{EF}$ 平行於 S_3 過點 D 的切線。(提示：過 $\overline{AB}$ 中點做 $\overline{EF}$ 的平行線)。

(2) 證明：四邊形 $BFDE$ 是一個矩形。



(14 分)

【證明】

(1) 設 S_1, S_2, S_3 圓心分別為 O_1, O_2, O ，過 O_1 做 $\overline{EF}$ 的平行線交 $\overline{EO_2}$ 於點 K ，因為

$\overline{O_1O_2} = \overline{DO} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ ， $\overline{BO} = \overline{KO_2} = \frac{1}{2}(\overline{BC} - \overline{AB})$ 加上 $\angle DBO = \angle O_1KO_2 = 90^\circ$ ，所以

$\triangle DBO \cong \triangle O_1KO_2$ 得出 $\angle BOD = \angle O_1O_2K$ 也就是直線 $\overline{DO}$ 平行於 $\overline{EO_2}$ ，而且得證 S_3 上過點 D 的切線平行於直線 $\overline{EF}$ 。

(2) 因為直徑 $\overline{AC}$ 和三半圓在點 F, D, E 的切線之間的夾角是相等的，即

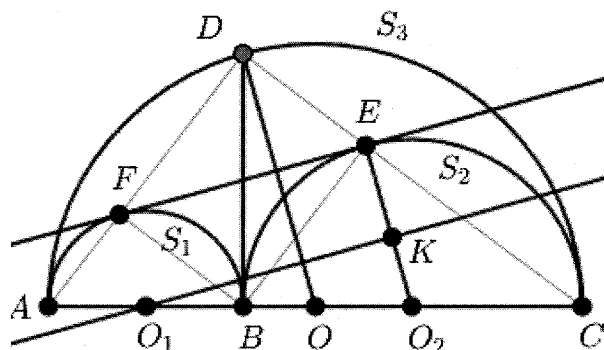
$$\angle FAB = \angle DAC = \angle EBC$$

$$\angle FBA = \angle DCA = \angle ECB$$

所以點 F 位於線段 $\overline{AD}$ 上，點 E 位於線段

$\overline{DC}$ 上。此外

$\angle AFB = \angle BEC = 90^\circ$ ，所以 $BFDE$ 是一個矩形。



113 學年度第一區 (花蓮高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

(數學科筆試二答案卷)

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共八題填充題，每題 3 分，滿分為 24 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫在答案欄內。

答 案 欄

(一)	(二)	(三)	(四)
$x_{112} = \frac{113^{112}}{112!} = \frac{113^{113}}{113!} = x_{113}$	$\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$	$\frac{17}{8}$	233
(五)	(六)	(七)	(八)
8	$2(b-a)$	$\frac{95}{144}$	$\frac{1}{25}$

總分：_____

113 學年度北一區 (花蓮高中)

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽 數學科口試試題&解答

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本口試卷共二題，思考時間 19-20 分鐘；參賽者可先在空白紙上作答，口試時請攜帶作答紙應試，口試答辯時間 20 分鐘，並繳回作答紙。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的精確度。

【口試 1】

數列 $\langle x_n \rangle$ 滿足 $x_1 = \frac{1}{2}$ ， $x_{k+1} = x_k^2 + x_k$ ，求 $\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_{2024}+1}$ 的整數部份。

[解]：由題意 $\langle x_n \rangle$ 是遞增數列且 $x_3 = \frac{21}{16} > 1$ ，

$$\frac{1}{x_{k+1}} = \frac{1}{x_k^2 + x_k} = \frac{1}{x_k(x_k + 1)} = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_k + 1},$$

得到 $\frac{1}{x_k + 1} = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}}$ ，所以

$$\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_{2024}+1} = \sum_{k=1}^{2024} \frac{1}{x_k+1} = \sum_{k=1}^{2024} \left(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}} \right) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{2025}} = 2 - \frac{1}{x_{2025}}$$

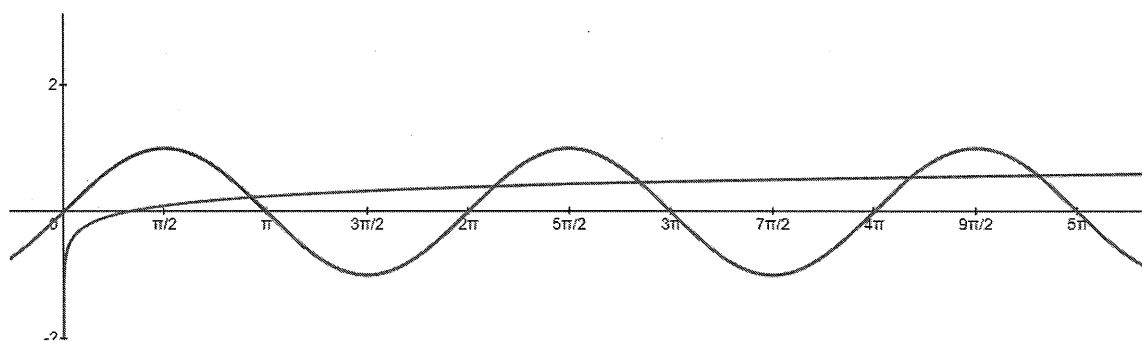
又 $x_{2025} > x_3 > 1$ ，所以其整數部份為 $2 - 1 = 1$ 。

【口試 2】

求方程式 $\sin x = \log_{113} x$ 的實根個數。

[解]： $\sin x$ 的值域是 $[-1, 1]$ ，而 $\log_{113} x$ 是單調遞增函數，當 $x > 113$ 時 $\log_{113} x > 1$ 不再與 $\sin x$ 圖形有交點，且 $\log_{113} 1 = 0$ ， $\log_{113} 113 = 1$ 。觀察兩個函數的圖形，除了第一個 $[0, \pi]$ 區間有一個交點，之後每隔長度 2π 會有兩個交點。

$\frac{113 - \pi}{2\pi} \approx \frac{113}{6.28} - 0.5 \approx 17.5$ 個 2π 區間，所以兩函數共有 $1 + 17 \times 2 = 35$ 個交點。



113 學年度臺北市（萬芳高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（一）試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一： 設圓 A 分別內切圓 B 和圓 C 於點 G 和點 H 。在圓 B 和圓 C 上各取一點 J, K 使得直線 JK 為圓 B 和圓 C 的公切線。令點 P 為直線 JK 與 BC 的交點，並自 P 作一直線與圓 A 交於 X, Y 兩點。

- (1) 試證 G, H, P 三點共線。(6 分)
- (2) 試證 J, K, X, Y 四點共圓。(6 分)

問題二：

- (1) 設 α, β, γ 為實數，且 $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ 。試證：

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + 2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = 1.$$

(4 分)

- (2) 已知實係數方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 有三個正根。若三根為 $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma$ ($\alpha, \beta, \gamma > 0$ 且 $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$) 的充分必要條件為一個關係式 $f(a, b, c) = 0$ ，試求 $f(a, b, c)$ 。(8 分)

< 背面尚有試題 >

問題三：

- (1) 試問：以正九邊形的頂點為頂點的三角形中，有多少個是銳角三角形？(4分)
- (2) 設 $A_1, A_2, \dots, A_{13}$ 是某圓周上的 13 個點。試問以這些點為頂點的三角形中，最多會有多少個是銳角三角形？(8分)

問題四： 設 $n \geq 2$ 為正整數，且 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 均為正實數。試證：

$$\frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2 a_3} + \frac{a_2^2}{a_2^2 + a_3 a_4} + \dots + \frac{a_{n-2}^2}{a_{n-2}^2 + a_{n-1} a_n} + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}^2 + a_n a_1} + \frac{a_n^2}{a_n^2 + a_1 a_2} \leq n - 1.$$

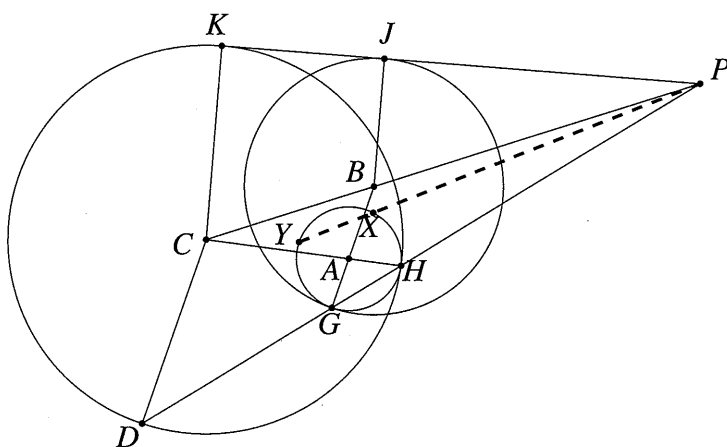
並說明等號何時成立。(13分)

113 學年度臺北市（萬芳高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（一）參考答案

問題一： 設圓 A 分別內切圓 B 和圓 C 於點 G 和點 H 。在圓 B 和圓 C 上各取一點 J, K 使得直線 JK 為圓 B 和圓 C 的公切線。令點 P 為直線 JK 與 BC 的交點，並自 P 作一直線與圓 A 交於 X, Y 兩點。

- (1) 試證 G, H, P 三點共線。(6 分)
(2) 試證 J, K, X, Y 四點共圓。(6 分)

【解】



- (1) 令圓 A , 圓 B , 圓 C 的半徑分別為 r_A, r_B, r_C 。因為 G, H 為公切點，所以 B, A, G 共線， C, A, H 共線，且 $AG = r_A, BG = r_B; CH = r_C, AH = r_A$ 。又 P 為直線 JK 與 BC 的交點，因為 J, K 為切點， B, C 為圓心，所以 $\triangle PBJ \sim \triangle PCK$ ，且 $\frac{PB}{PC} = \frac{BJ}{CK} = \frac{r_B}{r_C}$ 。現在 G, H, P 分別在直線 AB, CA, BC 上，且

$$\frac{AG}{GB} \cdot \frac{CH}{HA} \cdot \frac{BP}{PC} = \frac{r_A}{r_B} \cdot \frac{r_C}{r_A} \cdot \frac{r_B}{r_C} = 1.$$

故由孟氏 (Menelaus) 定理得知 G, H, P 三點共線。

- (2) 先證明 $\angle JKH = \angle JGH$ ：利用弦切角性質得 $\angle JKH = \angle KDH$ ，再用線段 KD 和線段 JG 平行，即得 $\angle KDH = \angle JGH$ 。

由 $\angle JKH = \angle JGH$ ，即可得 G, H, K, J 四點共圓。又已知 G, H, X, Y 四點共圓，故由圓幂性質知

$$PJ \cdot PK = PG \cdot PH = PX \cdot PY.$$

因為 P 點同時在 $\overline{JK}$ 與 $\overline{XY}$ 的外側，故由圓幂性質逆定理得 J, K, X, Y 四點共圓。 □

問題二：

- (1) 設 α, β, γ 為實數，且 $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ 。試證：

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + 2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = 1.$$

(4 分)

- (2) 已知實係數方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 有三個正根。若三根為 $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma$ ($\alpha, \beta, \gamma > 0$ 且 $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$) 的充分必要條件為一個關係式 $f(a, b, c) = 0$ ，試求 $f(a, b, c)$ 。(8 分)

【解】

- (1) 設 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + 2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = k$ 。配方可得

$$\begin{aligned} k - 1 &= \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha (\sin \beta \sin \gamma) + (\sin \beta \sin \gamma)^2 + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - \sin^2 \beta \sin^2 \gamma - 1 \\ &= (\sin \alpha + \sin \beta \sin \gamma)^2 - (1 - \sin^2 \beta)(1 - \sin^2 \gamma) \\ &= (\sin \alpha + \sin \beta \sin \gamma)^2 - (\cos \beta \cos \gamma)^2 \\ &= (\sin \alpha + \sin \beta \sin \gamma + \cos \beta \cos \gamma)(\sin \alpha + \sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma) \\ &= (\sin \alpha + \cos(\beta - \gamma))(\sin \alpha - \cos(\beta + \gamma)) \\ &= (\sin \alpha + \cos(\beta - \gamma)) \left(\sin \alpha - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right) \\ &= (\sin \alpha + \cos(\beta - \gamma))(\sin \alpha - \sin \alpha) = 0. \end{aligned}$$

因此 $k - 1 = 0$ ，即 $k = 1$ 。

- (2) 由 (1)，我們有以下等式

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + 2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = 1. \quad (1)$$

由根與係數關係(即 Vieta 公式)知

$$\begin{aligned} a &= -(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma), \\ b &= \sin \alpha \sin \beta + \sin \beta \sin \gamma + \sin \gamma \sin \alpha, \\ c &= -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma. \end{aligned}$$

(1) 式可化為

$$(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)^2 - 2(\sin \alpha \sin \beta + \sin \beta \sin \gamma + \sin \gamma \sin \alpha) + 2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = 1.$$

將 a, b, c 代入上式，即得

$$a^2 - 2b - 2c = 1. \quad (2)$$

再證：(2) 式 $a^2 - 2b - 2c = 1$ 為充分條件。設 x_1, x_2, x_3 為方程式的三正根，則

$$\begin{aligned}a &= -(x_1 + x_2 + x_3), \\b &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1, \\c &= -x_1x_2x_3.\end{aligned}$$

由 $a^2 - 2b - 2c = 1$ 可得

$$1 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + 2x_1x_2x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2x_3. \quad (3)$$

因為 x_1, x_2, x_3 均為正根，則由上式可知 $0 < x_i < 1, i = 1, 2, 3$ 。因此可設 $x_1 = \sin \alpha, x_2 = \sin \beta, x_3 = \sin \gamma$ ，其中 $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ 。現在要證：

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

由 (3) 式配方可得

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + 2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma &= 1 \\ \implies \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha (\sin \beta \sin \gamma) + \sin^2 \beta \sin^2 \gamma &= 1 - \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma + \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \\ \implies (\sin \alpha + \sin \beta \sin \gamma)^2 &= (1 - \sin^2 \beta)(1 - \sin^2 \gamma) = (\cos \beta \cos \gamma)^2.\end{aligned}$$

因為平方內的數均為正數，可得

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta \sin \gamma &= \cos \beta \cos \gamma \\ \implies \sin \alpha &= \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \\ &= \cos(\beta + \gamma) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\beta + \gamma)\right).\end{aligned}$$

因為 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ，且 $\frac{-\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - (\beta + \gamma) < \frac{\pi}{2}$ ，故

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - (\beta + \gamma),$$

即 $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ ，得證。

□

問題三：

- (1) 試問：以正九邊形的頂點為頂點的三角形中，有多少個是銳角三角形？(4分)
- (2) 設 $A_1, A_2, \dots, A_{13}$ 是某圓周上的 13 個點。試問以這些點為頂點的三角形中，最多會有多少個是銳角三角形？(8分)

【解】 (1) 30 個；(2) 91 個。

- (1) 注意到任意的 $\overline{A_i A_j}$ 都不會是外接圓的直徑 (9 是奇數)，所以在正九邊形 $A_1 A_2 A_3 \dots A_9$ 中不會出現直角三角形。

首先，計算以 $\angle A_1$ 為鈍角的鈍角三角形共有 6 個：

- (i) 含頂點 A_1, A_2 的鈍角三角形有 3 個： $A_9 A_1 A_2, A_8 A_1 A_2, A_7 A_1 A_2$ 。
- (ii) 含頂點 A_1, A_3 的鈍角三角形有 2 個： $A_8 A_1 A_3, A_9 A_1 A_3$
- (iii) 含頂點 A_1, A_4 的鈍角三角形有 1 個： $A_9 A_1 A_4$

同理，以 $\angle A_2, \angle A_3, \dots, \angle A_9$ 為鈍角的鈍角三角形也各有 6 個。因此，以正九邊形的頂點為頂點的三角形中，有 $6 \cdot 9 = 54$ 個鈍角三角形。故銳角三角形有 $C_9^3 - 54 = 30$ 個。

- (2) 將圓周上的 13 個點，從某點開始依逆時鐘方向記為 $A_1, A_2, \dots, A_{13}$ ，並令 $\widehat{A_i A_j}$ 表示由 A_i 依逆時鐘方向往 A_j 的圓弧。注意：對任意 $1 \leq i < j \leq 13$ ， $\widehat{A_i A_j} + \widehat{A_j A_i} = 360^\circ$ 恆成立；故弧 $\widehat{A_i A_j}$ 與弧 $\widehat{A_j A_i}$ 中至少有一為半圓或優弧。

令滿足「半圓或優弧 $\widehat{A_i A_j}$ 上恰有 $r-1$ 個內點 A_k 's (即 $|j-i|=r$)」的圓弧個數為 n_r 。則對每一個 $r=1, 2, 3, \dots, 12$ ，弧 $\widehat{A_i A_{i+r}}$ 與弧 $\widehat{A_{i+r} A_i}$ 中至少有一為半圓或優弧 ($i=1, 2, 3, \dots, 13$)，故 $n_r + n_{13-r} \geq 13$ 。對每一個半圓或優弧 $\widehat{A_i A_j}$ ，若圓弧上恰有 $r-1$ 個內點 A_k 's，則在弧 $\widehat{A_i A_j}$ 上至少有 $12-r$ 個內點 A_m 's 使得 $\triangle A_i A_j A_m$ 為直角或鈍角三角形，其中 $\angle A_m$ 為直角或鈍角。由此可推得：直角或鈍角三角形的個數總和 N 有一個下界如下：

$$\begin{aligned} N &\geq \sum_{r=1}^{12} n_r (12-r) = 11n_1 + 10n_2 + 9n_3 + \dots + 1n_{11} + 0n_{12} \\ &\geq 0(n_1 + n_{12}) + 1(n_2 + n_{11}) + 2(n_3 + n_{10}) + 3(n_4 + n_9) + 4(n_5 + n_8) + 5(n_6 + n_7) \\ &\geq 13(0+1+2+3+4+5) = 195. \end{aligned}$$

因此銳角三角形的個數至多為 $C_3^{13} - 195 = 91$ 。

又此最大值可達到。例如：仿第(1)小題可求得：以正十三邊形的頂點為頂點的三角形中，沒有直角三角形，有 195 個為鈍角三角形；此時恰有 91 個是銳角三角形。因此，所求三角形中最多有 91 個是銳角三角形。 $\square$

問題四： 設 $n \geq 2$ 為正整數，且 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 均為正實數。試證：

$$\frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2 a_3} + \frac{a_2^2}{a_2^2 + a_3 a_4} + \dots + \frac{a_{n-2}^2}{a_{n-2}^2 + a_{n-1} a_n} + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}^2 + a_n a_1} + \frac{a_n^2}{a_n^2 + a_1 a_2} \leq n-1.$$

並說明等號何時成立。(13分)

【解】 令 $t_i = \frac{a_{i+1} a_{i+2}}{a_i^2}$, $i = 1, 2, \dots, n$ ，其中設 $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ 。根據 t_i 的定義，原不等式等價於

$$\frac{1}{1+t_1} + \frac{1}{1+t_2} + \dots + \frac{1}{1+t_n} \leq 1.$$

同時，根據 t_i 的定義，也可得知

$$t_1 \cdot t_2 \cdot \dots \cdot t_n = \frac{a_2 a_3}{a_1^2} \cdot \frac{a_3 a_4}{a_2^2} \cdot \dots \cdot \frac{a_1 a_2}{a_n^2} = 1.$$

注意到這些正數的乘積等於1，所以它們之中至少有一個大或等於1，也就是 $\frac{1}{1+t_1}, \frac{1}{1+t_2}, \dots, \frac{1}{1+t_n}$ 中至少有一項小或等於 $\frac{1}{2}$ 。

(i) 若 $\frac{1}{1+t_1}, \frac{1}{1+t_2}, \dots, \frac{1}{1+t_n}$ 中有兩項以上小或等於 $\frac{1}{2}$ ，利用 $\frac{1}{1+t_i} < 1$ 之性質，可推得

$$\frac{1}{1+t_1} + \frac{1}{1+t_2} + \dots + \frac{1}{1+t_n} < (n-2) \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = n-1.$$

(ii) 若 $\frac{1}{1+t_1}, \frac{1}{1+t_2}, \dots, \frac{1}{1+t_n}$ 中僅有一項小或等於 $\frac{1}{2}$ ，不失一般性，可設僅有 $\frac{1}{1+t_1} \leq 1$ 。由此可知 $t_1 \geq 1$ ，而其他的 $t_i \leq 1$ 。所以得知 $t_2 \geq t_2 t_3 \dots t_n$ ，進而推得

$$\frac{1}{1+t_1} + \frac{1}{1+t_2} \leq \frac{1}{1+t_1} + \frac{1}{1+t_2 t_3 \dots t_n} = \frac{1}{1+t_1} + \frac{1}{1+\frac{1}{t_1}} = 1.$$

再利用其餘 $n-2$ 項的 $\frac{1}{1+t_i} < 1$ 的性質，可推得

$$\frac{1}{1+t_1} + \frac{1}{1+t_2} + \dots + \frac{1}{1+t_n} < 1 + (n-2) \cdot 1 = n-1.$$

故得證。

關於不等式中等號成立的條件，可觀察到當 $n \geq 3$ 時，我們都會用到：對某個 $i = 1, \dots, n$ 會有 $\frac{1}{1+t_i} < 1$ (不是那一項或兩項小或等於 $\frac{1}{2}$ 者)，從而使等號不發生。只有在 $n = 2$ 時，

$$\frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2 a_1} + \frac{a_2^2}{a_2^2 + a_1 a_2} = 1$$

對任意正數 a_1, a_2 均成立，為恆等式。故等號成立的充要條件為 $n = 2$ 。 □

113 學年度臺北市（萬芳高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（二）試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題3分，滿分為21分。
2. 考試時間：1小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算結果依序填寫在答案欄內。

問題：

1. 設 m 為實數。坐標平面上有兩集合

$$A = \{(x, y) \mid -3x - y + 3 \geq 0, x - 2y + 13 \geq 0, mx + y \geq 0\},$$

$$B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 169\}.$$

若 A 為 B 的子集合，則 m 的範圍為 _____（一）。

2. 三角形 ABC 中， D 為 $\overline{AC}$ 邊的中點。已知 $\angle ACB = 30^\circ$, $\angle CBD = 15^\circ$ 。設 E 為 D 關於直線 BC 的對稱點。若三角形 ACE 的外接圓在 A 點和在 E 點的切線交於 F ，且直線 AE 和 DF 交於 H ，則 $\angle AHF + \angle BAF =$ _____（二）。
3. 黑板上有兩個分數： $\frac{124}{2024}$ 與 $\frac{341}{1771}$ 。現在做以下的操作：將兩數中較大的數，換成兩數之差（大減小）；重複此操作，直到兩數相等為止。此時黑板上的兩數皆等於 _____（三）。

4. 令橢圓 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的兩個焦點為 F_1, F_2 。若點 P 在此橢圓上滿足 $\angle F_1PF_2 = \alpha$ ，則 $\triangle F_1PF_2$ 的面積為 _____（四）。（以 α 表示）
5. 空間中有一個正立方體。一開始蝸牛小蝸在其中一個頂點 A 處，想要沿著正立方體的稜邊爬到距離 A 最遠的頂點 B 。設小蝸每分鐘爬行的距離為一個稜長，且在每個頂點處爬向任一相鄰頂點的機率皆相同。則小蝸由頂點 A 到達頂點 B 所花時間的期望值為 _____（五）分鐘。

< 背面尚有試題 >

6. 坐標空間中，設 A, B 兩點在某直線 L 上的投影點分別為 C, D 。已知 $\overline{AC} = \overline{BD} = \sqrt{3}$ ，且 AC, BD 兩直線方程式分別為

$$AC: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = z-1, \quad BD: \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-1},$$

則 $\overline{AB}$ 的長度為 _____ (六)。

7. 若不等式

$$\sqrt{2}(2a+3)\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{6}{\sin\theta + \cos\theta} - 2\sin 2\theta < 3a+6$$

在 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 恆成立，則實數 a 的範圍為 _____ (七)。

< 試題結束 >

113 學年度臺北市（萬芳高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（二）參考答案卷

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算結果依序填寫在答案欄內。

答 案 欄

(一)	(二)	(三)	(四)
$0 \leq m \leq \frac{12}{5}$	105°	$\frac{31}{3542}$	$4 \tan \frac{\alpha}{2}$
(五)	(六)	(七)	
10	$\frac{5\sqrt{3}}{3}$	$a > 3$	

113 學年度臺北市（萬芳高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科口試試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本口試卷共兩題，思考時間 15 分鐘；參賽者可先在計算紙上作答，口試答辯時間 15 分鐘，並繳回計算紙。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的細節。

【問題一】 已知 $\triangle ABC$ 的面積為 $24\sqrt{3}$ ，周長為 36，且 $\angle A, \angle B, \angle C$ 成等差數列。試求此三角形的三邊長。 (15 分)

【問題二】 將有理數 $\frac{10^{2024}}{10^{44}+3}$ 化為小數，試求其個位數字。 (15 分)

< 試題結束 >

113 學年度臺北市（萬芳高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科口試參考答案

問題一： 已知 $\triangle ABC$ 的面積為 $24\sqrt{3}$ ，周長為 36，且 $\angle A, \angle B, \angle C$ 成等差數列。
試求此三角形的三邊長。 (15 分)

【解】 三邊長分別為 16, 14, 6..

首先由三內角和等於 180° ，得知 $\angle B$ 為其算術中項 $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$ 。設 A, B, C 的三對邊長分別為 a, b, c 。

因為 $\triangle ABC$ 的面積為 $24\sqrt{3}$ ，由面積公式得

$$24\sqrt{3} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{\sqrt{3}}{4}ac \implies ac = 96.$$

再利用餘弦定理得

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \implies b^2 = a^2 + c^2 - ac.$$

再加上周長的條件，可列出聯立方程式

$$\begin{cases} a+b+c=36, \\ ac=96, \\ b^2=a^2+c^2-ac. \end{cases}$$

解得 $b=14$, $\{a, c\} = \{16, 6\}$ 。所以本題答案為 16, 14, 6。

□

問題二： 將有理數 $\frac{10^{2024}}{10^{44}+3}$ 化為小數，試求其個位數字。 (15 分)

【解】 7.

易知 $N = \frac{10^{2024} - 3^{46}}{10^{44} + 3}$ 為整數，且 $0 < \frac{3^{46}}{10^{44} + 3} < 1$ 。故所求即為 N 的個位數字。計算可得

$$\begin{aligned} N &= \frac{10^{2024} - 3^{46}}{10^{44} + 3} = \sum_{k=0}^{45} 10^{44(45-k)} \cdot (-3)^k \\ &\equiv (-3)^{45} = -3^{45} \equiv -3^1 \equiv 7 \pmod{10}. \end{aligned}$$

(此處用到 $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$) 所以本題答案為 7。易知 $N = \frac{10^{2024} - 3^{46}}{10^{44} + 3}$ 為整數，且 $0 < \frac{3^{46}}{10^{44} + 3} < 1$ 。故所求即為 N 的個位數字。計算可得

$$\begin{aligned} N &= \frac{10^{2024} - 3^{46}}{10^{44} + 3} = \sum_{k=0}^{45} 10^{44(45-k)} \cdot (-3)^k \\ &\equiv (-3)^{45} = -3^{45} \equiv -3^1 \equiv 7 \pmod{10}. \end{aligned}$$

(此處用到 $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$) 所以本題答案為 7。 □

113 學年度新北市 (板橋高中)

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試 (一) 試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一：現有一銳角 $\triangle ABC$ ，其三高將 $\triangle ABC$ 分為六個小三角形，此六個小三角形的內切圓半徑依逆時針方向依序為 $r_1, r_2, \dots, r_6$ 。試證 $r_1 r_3 r_5 = r_2 r_4 r_6$ 。

(12 分)

問題二：令 p 為大於 3 的質數。試證： $\frac{p^{2024}-1}{24}$ 為一整數。

(12 分)

問題三：坐標平面上，已知 A, B 是橢圓 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上兩點，使得 $\triangle OAB$ 有最大的面積，其中 O 為原點。

(1) 試求 $\triangle OAB$ 的面積。 (6 分)

(2) 若 A, B 的坐標分別為 $(a, b), (c, d)$ ，試求 $a+b+c+d$ 的最大可能值。 (6 分)

問題四：對任意 13 個實數 $a_1, a_2, \dots, a_{13}$ ，其中 $-1 \leq a_i \leq 1, i=1, 2, \dots, 13$ ，試證必可找到 2 個數 a_i 與 a_j ， $i \neq j$ ，使得

$$\frac{19}{20} < a_i a_j + \sqrt{1 - a_i^2 - a_j^2 + a_i^2 a_j^2} \leq 1。$$

(13 分)

113 學年度新北市 (板橋高中)

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試 (二) 試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題 3 分，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案依序填寫在答案欄內。

1. 若方程式 $|x^2 - 6x + 6| = a$ 有四個相異實根，則實數 a 的範圍為 _____ (一) 。

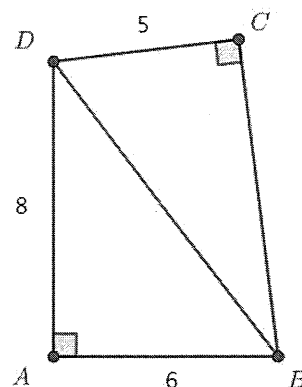
2. 坐標平面上有 $\triangle ABC$ ，其中 $\overline{AB} = 6$ 、 $\overline{AC} = 5$ 、 $\overline{BC} = 3$ 。現有一線性變換 T ，滿足

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ 且 } T\left(\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}。$$

若 $P = T(A)$ 、 $Q = T(B)$ 、 $R = T(C)$ ，則 $\triangle PQR$ 的面積為 _____ (二) 。

3. 如圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\angle A = \angle C = 90^\circ$ ，
且 $\overline{AB} = 6$ 、 $\overline{AD} = 8$ 、 $\overline{CD} = 5$ 。

則內積 $\vec{BA} \cdot \vec{CD}$ 之值為 _____ (三) 。



〈背面尚有試題〉

4. 令 ω 為方程式 $1+x+x^2=0$ 的一個複數根。若

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

則 $|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2$ 之值為 (四)。

5. 若兩相異正整數 a, b 的立方差為 2189，則 $a+b$ 的最大可能值為 (五)。

6. 方程組 $\begin{cases} 243x^5 + 81x^4 + 27x^3 + 9x^2 + 3x + 1 = 0 \\ 9x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 3x - 1 = 0 \end{cases}$ 的所有根之乘積為 (六)。

7. 有五種不同的禮物，甲、乙各自列出想要的禮物。現已知甲想要的禮物至少有 1 種不是乙想要的，乙想要的禮物也至少有 1 種不是甲想要的。這樣的列法有 (七) 種。

〈試題結束〉

113 學年度新北市 (板橋高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科口試試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本口試卷共 2 題，思考時間 15 分鐘；參賽者可先在計算紙上作答，口試答辯時間 15 分鐘，並繳回計算紙。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的細節。

【問題一】：

在四維空間中有一點 $A(2, 0, 2, 4)$ 及平面

$$E = \{ \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \mid \alpha, \beta \text{ 為實數} \},$$

其中向量 $\vec{u} = (1, 0, 1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 0, 1)$ 。試求點 A 到平面 E 的距離。

(15 分)

【解】

【問題二】：

令 $f(x) = -8 + \sqrt{64 + x}$ ，且 $0 < a, b \leq 36$ 。試證：

$$\frac{f(a)}{a} - \frac{f(b)}{b} < \frac{1}{144}。$$

(15 分)

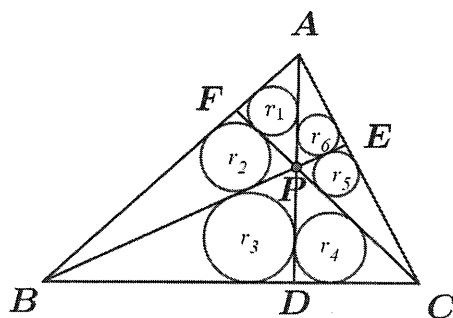
【解】

113 學年度新北市 (板橋高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試 (一) 參考答案

問題一：現有一銳角 $\triangle ABC$ ，其三高將 $\triangle ABC$ 分為六個小三角形，此六個小三角形的內切圓半徑依逆時針方向依序為 $r_1, r_2, \dots, r_6$ 。試證 $r_1 r_3 r_5 = r_2 r_4 r_6$ 。

(12 分)

【解】



圖形標號如上圖。

因為 $\triangle CDP \sim \triangle AFP$ ，所以 $\frac{r_4}{PD} = \frac{r_1}{PF}$

因為 $\triangle AEP \sim \triangle BDP$ ，所以 $\frac{r_6}{PE} = \frac{r_3}{PD}$

因為 $\triangle BPF \sim \triangle CPE$ ，所以 $\frac{r_2}{PF} = \frac{r_5}{PE}$

三式相乘即得 $r_1 r_3 r_5 = r_2 r_4 r_6$ 。

問題二：令 p 為大於 3 的質數。試證： $\frac{p^{2024}-1}{24}$ 為一整數。

(12 分)

【解】

僅需分別證明 $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$ 和 $p^2 \equiv 1 \pmod{8}$ 即可。則由 3 與 8 互質可知

$$p^2 \equiv 1 \pmod{24}.$$

進而推得 $p^{2024} = (p^2)^{1012} \equiv 1^{1012} \pmod{24} = 1 \pmod{24}$ 。

證明： $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$

由於 p 為大於 3 的質數， $p = 3k+1$ 或 $3k+2$ 。推得 $p^2 = 9k^2 + 6k + 1$ 或 $9k^2 + 12k + 4$ ，兩者除以 3 的餘數皆為 1。

證明： $p^2 \equiv 1 \pmod{8}$

由於 p 為大於 3 的質數，不失一般性，假設 $p = 2k+1$ ，其中 k 為大於 1 的整數。
則

$$p^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1.$$

由於 $k, k+1$ 為連續整數， $k(k+1)$ 必定被 2 整除。因此， $4k(k+1)$ 必定被 8 整除。

問題三：坐標平面上，已知 A, B 是橢圓 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上兩點，使得 $\triangle OAB$ 有最大的面積，其中 O 為原點。

(1) 試求 $\triangle OAB$ 的面積。 (6 分)

(2) 若 A, B 的坐標分別為 $(a, b), (c, d)$ ，試求 $a + b + c + d$ 的最大可能值。 (6 分)

【解】 (1) 設 $A(a, b), B(c, d)$ 。由柯西不等式：

$$(a^2 + 4b^2)(c^2 + 4d^2) = (a^2 + (2b)^2)((2d)^2 + (-c)^2) \geq (2ad - 2bc)^2,$$

可得 $16 \geq 4(ad - bc)^2$ ，故 $|ad - bc| \leq 2$ 。其最大值 $|ad - bc| = 2$ 可達到，例

如： $A(2, 0), B(0, 1)$ ，故 $\triangle OAB$ 的面積為 $\frac{1}{2}|ad - bc| = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ 。

(2) 令 $p = a, q = 2b, r = c, s = 2d$ ，則有 $p^2 + q^2 = r^2 + s^2 = 4$ 且 $|ps - qr| = 4$ 。

因此，兩點 $P(p, q), Q(r, s)$ 都在圓 $O: x^2 + y^2 = 4$ 上，且兩向量

$\vec{OP} = (p, q)$ 及 $\vec{OQ} = (r, s)$ 所展成的三角形面積為

$$\left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |ps - qr| = 2。$$

又圓 O 的兩半徑所展成的三角形面積最大值為 2，即發生在兩半徑互相

垂直時，故 $\vec{OP} \perp \vec{OQ}$ 。可設 $P(2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$ ，而點 $Q(r, s)$ 的坐標為

$$\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \cos \theta \\ 2 \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \sin \theta \\ -2 \cos \theta \end{bmatrix}。$$

得知 $(p, q, r, s) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 2 \sin \theta, -2 \cos \theta)$ ，亦即

$$(a, b, c, d) = (2 \cos \theta, \sin \theta, 2 \sin \theta, -\cos \theta)。$$

故 $a+b+c+d = \cos \theta + 3 \sin \theta$ ，其最大值為 $\sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ ，此最大值發

生在 $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}, \sin \theta = \frac{-1}{\sqrt{10}}$ 時。因此，

$$(a, b) = \left(\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right), (c, d) = \left(\frac{6}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}} \right)。$$

問題四：對任意 13 個實數 $a_1, a_2, \dots, a_{13}$ ，其中 $-1 \leq a_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, 13$ ，試證必可找

到 2 個數 a_i 與 a_j ， $i \neq j$ ，使得 $\frac{19}{20} < a_i a_j + \sqrt{1 - a_i^2 - a_j^2 + a_i^2 a_j^2} \leq 1$ 。

(13 分)

【解】

在 $[0, \pi]$ 中存在 13 個實數 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{13}$ ，使得 $\cos \alpha_i = a_i, \forall i$

將 $[0, \pi]$ 分成 12 等分，每等分長為 $\frac{\pi}{12}$ ，即 $\left[0, \frac{\pi}{12}\right], \left[\frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{12}\right], \dots, \left[\frac{11\pi}{12}, \pi\right]$ 。

由鴿籠原理，存在 α_i, α_j 屬於同一個區間。

不妨設 $\alpha_i \geq \alpha_j$ ，則 $0 \leq \alpha_i - \alpha_j \leq \frac{\pi}{12}$ 。

因此 $\cos \frac{\pi}{12} \leq \cos(\alpha_i - \alpha_j) \leq \cos 0$ (1)

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} > \frac{19}{20}$$

$$\cos 0 = 1$$

$$\sqrt{1 - a_i^2 - a_j^2 + a_i^2 a_j^2} = \sqrt{(1 - a_i^2)(1 - a_j^2)}$$

$$\cos(\alpha_i - \alpha_j) = \cos \alpha_i \cos \alpha_j + \sin \alpha_i \sin \alpha_j = a_i a_j + \sqrt{1 - a_i^2} \sqrt{1 - a_j^2}$$

將這些式子代入(1)，得證。

113 學年度新北市 (板橋高中)

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試 (二) 參考答案

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題 3 分，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案依序填寫在答案欄內。

答 案 欄

(一)	(二)	(三)	(四)
$0 < a < 3$	$4\sqrt{21}$	$9+12\sqrt{3}$	3
(五)	(六)	(七)	
15	$\frac{1}{9}$	570	

總分：_____

113 學年度新北市 (板橋高中)

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科口試參考答案

【問題一】：

在四維空間中有一點 $A(2,0,2,4)$ 及平面

$$E = \{\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \mid \alpha, \beta \text{ 為實數} \},$$

其中向量 $\vec{u} = (1, 0, 1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 0, 1)$ 。試求點 A 到平面 E 的距離。

(15 分)

【解】

答： $2\sqrt{2}$

解：先求點 A 在平面 E 上的正交投影點 $P = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ ，其中 $\alpha = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$ ，

$\beta = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$ ，得到 $P = (2, 2, 2, 2)$ 。點 A 到平面 E 的距離即為 $\overline{AP} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ 。

【問題二】：

令 $f(x) = -8 + \sqrt{64+x}$ ，且 $0 < a, b \leq 36$ 。試證：

$$\frac{f(a)}{a} - \frac{f(b)}{b} < \frac{1}{144}。$$

(15 分)

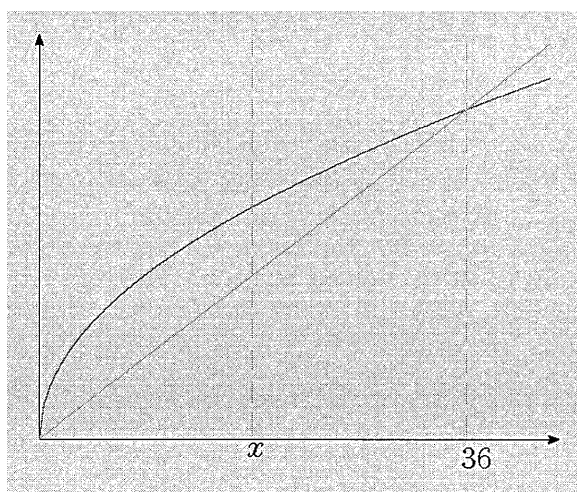
【解】

- 首先我們證明對於所有的 $x \in (0, 36)$ ， $\frac{f(x)}{x} > \frac{1}{18}$ 。考慮圖形 $y = f(x)$ 上通過 $(0, 0)$ 與 $(36, 2)$ 兩點之割線(如過下圖綠線所示)，該割線的直線方程式為

$$y = \frac{1}{18}x$$

由於 $y = f(x)$ 為凹口向下的函數，所以在區間 $(0, 36)$ 上，函數曲線在割線上方，故

$$f(x) > \frac{1}{18}x \text{ 即 } \frac{f(x)}{x} > \frac{1}{18}$$



- 再來，我們證明

$$\frac{f(x)}{x} < \frac{1}{16}$$

這個部分直接證明

$$\frac{-8 + \sqrt{64+x}}{x} < \frac{1}{16}$$

即可。

合併上述兩個部分，我們可得

$$\begin{aligned}\frac{f(a)}{a} - \frac{f(b)}{b} &< \frac{1}{16} - \frac{1}{18} \\ &= \frac{1}{144}\end{aligned}$$

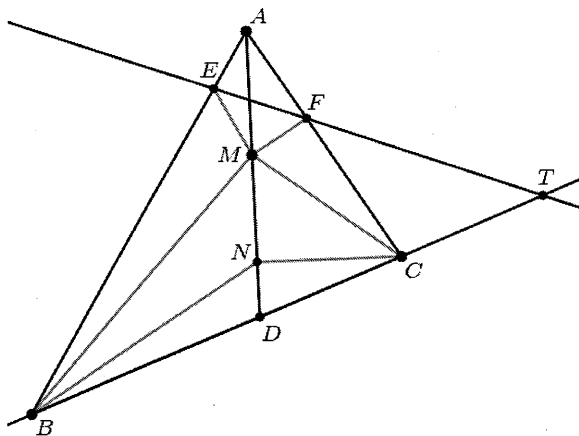
113 學年度北二區(新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(一) 試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一： 已知三角形 ABC 中 $\overline{AB} > \overline{AC}$ ， $\angle A$ 的角平分線交線段 $\overline{BC}$ 於點 D 。點 M, N 在線段 $\overline{AD}$ 上，使得 $\angle ABM = \angle NBC < \frac{1}{2}\angle ABC$ ， $\angle ACM = \angle NCB < \frac{1}{2}\angle ACB$ 。設三角形 MNB 的外接圓交線段 $\overline{AB}$ 於點 E ，三角形 MNC 的外接圓交線段 $\overline{AC}$ 於點 F ，且 $\overline{EF}$ 和 $\overline{BC}$ 交於點 T 。試證：



(1) B, C, F, E 四點共圓。

(5 分)

(2) $\overline{TM}^2 = \overline{TB} \times \overline{TC}$ 。

(11 分)

問題二： 設有 n ($n > 1$) 個實數滿足 $1 = a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ 。證明

$$\frac{\sqrt{a_2 - a_1}}{a_2} + \cdots + \frac{\sqrt{a_n - a_{n-1}}}{a_n} \leq \frac{\sqrt{4n-7}}{2}。$$

(16 分)

問題三： 西洋棋中的皇后可以選擇往橫向、縱向、四個方向的對角線走任意多步。試問 7×7 的棋盤中至多可以放幾個皇后使得每個皇后最多攻擊到一個皇后？

(17 分)

113 學年度北二區(新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(二) 試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題3分，滿分為21分。
2. 考試時間：1小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算結果依序填寫在答案欄內。

問題：

1. 設 ABC 為正三角形，點 D 在 $\overline{BC}$ 邊上且 $\overline{BD}:\overline{DC}=1:3$ 。則 $\tan \angle BAD =$ _____ (一)。
2. 設 $f(x) = \frac{2^x}{2^x + \sqrt{2}}$ ，試求 $f(\frac{1}{113}) + f(\frac{2}{113}) + \cdots + f(\frac{112}{113})$ 的值為 _____ (二)。
3. 已知一圓 Γ 過點 $A(-1,0)$ 且與圓 $x^2 + y^2 - 2x - 7 = 0$ 相切，則 Γ 的圓心的軌跡方程式為 _____ (三)。
4. 僅使用字母A,B，且共使用10個字母所組成的字串中，不出現連續6個A的字串共有 _____ (四) 個。
5. 四面體 $ABCD$ 中， $\overline{AB}, \overline{CD}$ 長度分別為1,2，且所在的兩直線距離為1，並其方向向量夾 30° 。求四面體 $ABCD$ 的體積為 _____ (五)。
6. 正整數對 (a,b) 滿足：對所有正整數 n ，整數 $\left[\frac{a^2 + 113a}{2024n} \right] + b + 1$ 都是質數。

求滿足條件的正整數對 (a,b) 中， a 的最大值可為 _____ (六)。

註： $[x]$ 是不超過 x 的最大整數。

7. 已知 $n_1, \dots, n_6$ 是非負整數，且 $n_i < i$ ($i = 1 \sim 6$)。若 $\sum_{k=1}^6 \frac{n_k}{k!} = \frac{31}{36}$ ，求 $\sum_{k=1}^6 n_k$ 的值為 _____ (七)。

113 學年度北二區(新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科口試試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本口試卷共兩題，思考時間 15 分鐘；參賽者可先在計算紙上作答，口試答辯時間 12 分鐘，並繳回計算紙。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的細節。

問題：

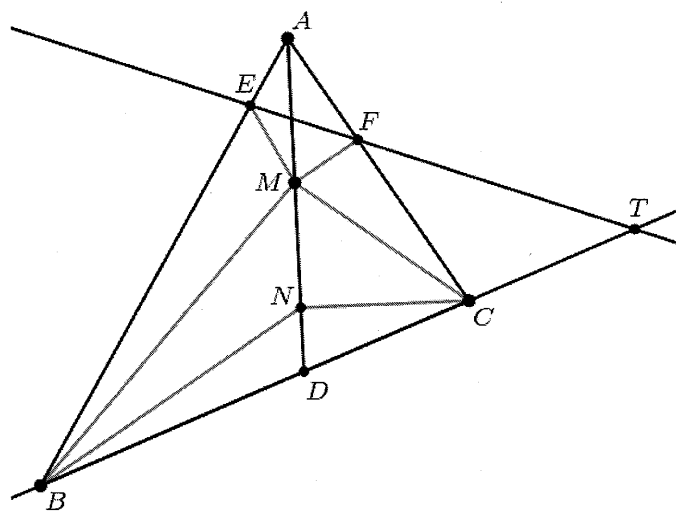
1. 已知數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_{n+1} = 3a_n + \sqrt{8a_n^2 + 1}$ ， $n \geq 0$ ，且 $a_0 = 1$ 。
 - (1) 證明數列 $\{a_n\}$ 的每一項都是整數。
 - (2) 證明 $a_{n+1}a_{n-1} + 1$ 為完全平方數。
2. 設實係數三次多項式方程式 $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 的係數滿足 $b, c, d > 0$ 且 $bc - d > 0$ 。試證：此方程式的三根之實部均小於 0。

113 學年度北二區 (新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
(數學科筆試一參考答案)

問題一： 已知三角形 ABC 中 $\overline{AB} > \overline{AC}$ ， $\angle A$ 的角平分線交線段 $\overline{BC}$ 於點 D 。點 M, N 在線段 $\overline{AD}$ 上，使得 $\angle ABM = \angle NBC < \frac{1}{2}\angle ABC$ ， $\angle ACM = \angle NCB < \frac{1}{2}\angle ACB$ 。設三角形 MNB 的外接圓交線段 $\overline{AB}$ 於點 E ，三角形 MNC 的外接圓交線段 $\overline{AC}$ 於點 F ，且 $\overline{EF}$ 和 $\overline{BC}$ 交於點 T 。試證：

(1) B, C, F, E 四點共圓。

(2) $\overline{TM}^2 = \overline{TB} \times \overline{TC}$ 。



證明：

1. B, N, M, E 四點共圓，得 $\overline{AM} \times \overline{AN} = \overline{AE} \times \overline{AB}$ 。

同理得 $\overline{AF} \times \overline{AC} = \overline{AM} \times \overline{AN}$ 。故 B, C, F, E 四點共圓。

2. $\angle EMA = \angle EBN = \angle MBC$ ， $\angle FMA = \angle FCN = \angle MCB$ 。

$$\begin{aligned}
 \angle BME &= \angle AEM - \angle ABM \\
 &= (180^\circ - \angle EMA - \angle EAM) - (\angle ABC - \angle MBC) \\
 &= 180^\circ - \angle EAM - \angle ABC \\
 &= 180^\circ - \angle FAM - (180^\circ - \angle EFC) \\
 &= 180^\circ - \angle FAM - \angle AFE \\
 &= \angle EFM + \angle FMA \\
 &= \angle EFM + \angle MCB
 \end{aligned}$$

故三角形 EFM 外接圓和三角形 MCB 外接圓外切於點 M 。

而點 T 在此二圓的根軸上，得知 TM 為二圓的公切線。

故 $\overline{TM}^2 = \overline{TB} \times \overline{TC}$ 。

□

問題二： 設有 $n (n > 1)$ 個實數滿足 $1 = a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ 。證明

$$\frac{\sqrt{a_2 - a_1}}{a_2} + \cdots + \frac{\sqrt{a_n - a_{n-1}}}{a_n} \leq \frac{\sqrt{4n-7}}{2}。$$

證明：用數學歸納法

$$n=2 \text{ 時，有 } \frac{\sqrt{a_2-1}}{a_2} \leq \frac{1}{2} \quad (\because (a_2-2)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{a_2^2}{4} \geq a_2-1 \Rightarrow \frac{\sqrt{a_2-1}}{a_2} \leq \frac{1}{2})$$

假設 $n=k$ ，任意 $1 = a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$ 都有

$$\frac{\sqrt{a_2 - a_1}}{a_2} + \cdots + \frac{\sqrt{a_k - a_{k-1}}}{a_k} \leq \frac{\sqrt{4k-7}}{2}$$

當 $n=k+1$ ，對任意 $1 = a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{k+1}$ 依假設我們有 k 個實數

$$1 = \frac{a_2}{a_2} \leq \frac{a_3}{a_2} \leq \cdots \leq \frac{a_{k+1}}{a_2} \text{ 滿足不等式}$$

$$\frac{\sqrt{\frac{a_3}{a_2} - 1}}{\frac{a_3}{a_2}} + \cdots + \frac{\sqrt{\frac{a_{k+1}}{a_2} - \frac{a_k}{a_2}}}{\frac{a_{k+1}}{a_2}} \leq \frac{\sqrt{4k-7}}{2}$$

因此

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{a_2 - a_1}}{a_2} + \cdots + \frac{\sqrt{a_k - a_{k-1}}}{a_k} + \frac{\sqrt{a_{k+1} - a_k}}{a_{k+1}} \\ & \leq \frac{\sqrt{a_2 - a_1}}{a_2} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} \left(\frac{\sqrt{\frac{a_3}{a_2} - 1}}{\frac{a_3}{a_2}} + \cdots + \frac{\sqrt{\frac{a_{k+1}}{a_2} - \frac{a_k}{a_2}}}{\frac{a_{k+1}}{a_2}} \right) \\ & \leq \frac{\sqrt{a_2 - a_1}}{a_2} \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{a_2}} \frac{\sqrt{4k-7}}{2} \leq \sqrt{\frac{a_2 - a_1}{a_2^2} + \frac{1}{a_2}} \sqrt{1^2 + \frac{4k-7}{4}} \quad (\text{柯西不等式}) \\ & \leq \sqrt{\frac{2a_2 - 1}{a_2^2}} \sqrt{\frac{4k-3}{4}} \leq \sqrt{\frac{4k-3}{4}} \end{aligned}$$

由數學歸納法，本題得證

□

問題三：西洋棋中的皇后可以選擇往橫向、縱向、四個方向的對角線走任意多步。試問 7×7 的棋盤中至多可以放幾個皇后使得每個皇后最多攻擊到一個皇后？

證明：9 個

設放了 m 個，顯然 $m > 7$ 。因為每一列至多兩個，因此至少有 $m - 7$ 列有兩個皇后。所以有 $m - 2(m - 7) = 14 - m$ 個皇后是單獨在一列中。同理有 $14 - m$ 個皇后單獨在同一行。因為每個皇后必須單獨一行或單獨一列，所以有 $m \leq 2(14 - m)$ ，即 $m \leq \frac{28}{3} = 9.3333$ ，因此最多放九個。

估計出來還要構造如下：

						♔
			♔	♔		
♔						
♔						
					♔	
					♔	
	♔	♔				

□

113 學年度北二區(新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
(數學科筆試二參考答案)

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算結果依序填寫在答案欄內。

答 案 欄

(一)	(二)	(三)	(四)
$\frac{\sqrt{3}}{7}$	56	$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$	976
(五)	(六)	(七)	
$\frac{1}{6}$	49	8	

113 學年度北二區(新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
(數學科口試參考答案)

1. 已知數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_{n+1} = 3a_n + \sqrt{8a_n^2 + 1}$, $n \geq 0$, 且 $a_0 = 1$.

(1) 證明數列 $\{a_n\}$ 的每一項都是整數。

(2) 證明 $a_{n+1}a_{n-1} + 1$ 為完全平方數。

【解】

$$a_{n+1}^2 - 6a_{n+1}a_n + 3^2a_n^2 = 8a_n^2 + 1 \quad (1)$$

$$a_{n+1}^2 - (6a_n)a_{n+1} + (a_n^2 - 1) = 0 \quad (2)$$

由 (1) 式遞迴前一項得 $a_n^2 - 6a_na_{n-1} + 3^2a_{n-1}^2 = 8a_{n-1}^2 + 1$, 整理一下得

$$a_n^2 - (6a_n)a_{n-1} + (a_n^2 - 1) = 0 \quad (3)$$

觀察 (2)(3) 式得知 a_{n+1}, a_{n-1} 為二次式 $x^2 - (6a_n)x + (a_n^2 - 1) = 0$ 的兩個根 ,

由根與係數關係得到 $a_{n+1} + a_{n-1} = 6a_n$, 即有遞迴式 $a_{n+1} = 6a_n - a_{n-1}$, 且 $a_0 = 1$,

$a_1 = 6$ 都是整數 , 再由遞迴式與數學歸納法知所有的 a_n 都是整數。

由根與係數關係得到 $a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 - 1$, 故 $a_{n+1}a_{n-1} + 1$ 為完全平方數。 □

113 學年度北二區(新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
(數學科口試參考答案)

2. 設實係數三次多項式方程式 $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 的係數滿足 $b, c, d > 0$ 且 $bc - d > 0$ 。試證：此方程式的三根之實部均小於 0。

【解】先只考慮 $\alpha_1 = \alpha$ 為實根， $\alpha_2, \alpha_3 = \beta \pm \gamma i$ 為共軛虛根的情況。則

$$\begin{aligned} b &= -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = -\alpha - 2\beta, \\ c &= \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 = 2\alpha\beta + \beta^2 + \gamma^2 \\ d &= -\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = -\alpha(\beta^2 + \gamma^2). \end{aligned} \tag{1}$$

於是

$$\begin{aligned} bc - d &= -(\alpha + 2\beta)(2\alpha\beta + \beta^2 + \gamma^2) + \alpha(\beta^2 + \gamma^2) \\ &= -2(\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 + \beta\gamma^2) \\ &= -2\beta((\alpha + \beta)^2 + \gamma^2). \end{aligned} \tag{2}$$

因為 $bc - d > 0$ ，由(2)式得 $\beta < 0$ ，即兩個共軛虛根的實部小於 0。

因為 $d > 0$ ，由(1)式得 $\alpha < 0$ ，即唯一實根的實部小於 0。

若該方程式有三實根，則由 $d > 0$ 可推得三根為三負根或兩正一負。在兩正根一負根的情況，設三根為 $r, s, -t$ ，其中 $r, s, t > 0$ 。因為 $b > 0$ ，所以

$$r + s - t = -b < 0 \implies t > r + s.$$

而

$$c = rs - rt - st = rs - t(r + s) < rs - (r + s)^2 = -r^2 - rs - s^2 < 0,$$

不合。所以 b, c, d 皆為正且有三實根時，三根必為負根。

□

113 學年度高級中學數學學科能力競賽

中投區複賽試題（一）

（時間二小時）

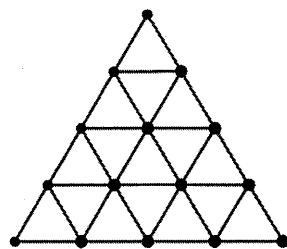
注意事項：

1. 本試卷共五題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、以六種不同的顏色為正立方體的表面上色，每一面一個顏色且相鄰面不同色，通過旋轉重合的塗色方法視為同一方法，請問有幾種上色方法。（一種顏色可以塗多面）
(9 分)

二、試求滿足方程式
(10 分)
$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}10^x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}10^x\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{3}10^x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}10^x\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}10^x + \frac{\sqrt{2}}{8} = 0$$
 的所有實數解 x 。

三、如右圖由 16 個正三角形構成共有 15 個頂點，由這 15 個頂點任取 3 點可以構成三角形的機率是多少？
(10 分)



四、假設 $f(x)$ 是一個首項係數為 1 的四次實係數多項式而且
(10 分) $f(3)=30, f(6)=99, f(9)=204$ ，求 $f(-1)+f(13)$ 。

五、對於正整數 a ，若 $a=2^n \cdot 3^m \cdot b$ ，其中 n, m 為非負整數， b 為
(10 分) 與 2, 3 均互質的正整數，則定義 $f(a)=n+m$ 。在小於或等於 2024 的正整數 a 中，滿足 $f(a)=4$ 且 $f(a+2024) \geq 4$ 的 a 共有幾個？

113學年度高級中學數學學科能力競賽

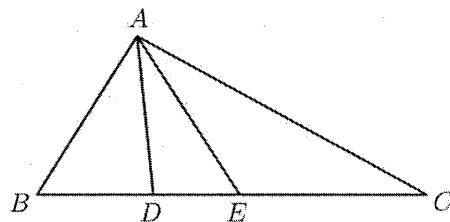
中投區複賽試題（二）（時間一小時）

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題3分，滿分為21分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、設 $a, b, c \geq 0$ 且 $2a + b + c = 1$ ，求 $2ab + bc + 2ca$ 的最大值。

二、如右圖所示，已知 $\angle BAD = \angle DAE = \angle EAC$ 且 $\overline{BD} = 2, \overline{DE} = 1, \overline{EC} = 3$ ，求 $\triangle ABC$ 的面積？



三、 p 與 q 皆為質數而且滿足 $\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}$ ， n 為正整數，請找出所有可能的 $q - p$ 。

四、實數 a, b, c 使得 $ab + bc + ca = 1$ 而且 $a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b$ ，找出所有可能的 $a^2 + b^2 + c^2$ 。

五、設函數 $f(x)$ 的定義域為 $x \geq 1$ ，而且當 $a < b$ 時則有 $f(a) < f(b)$ 。已知對所有的 $x \geq 0$ ， f 均滿足 $f(4^x) + f(2^x) + f(1) = x$ ，求此函數 $f(x)$ 。

六、設 $\theta_1, \theta_2 \geq 0$ ， $\theta_1 + \theta_2 \leq \pi$ ，求 $f(\theta_1, \theta_2) = \sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin(\theta_1 + \theta_2)$ 的最大值。

七、若正整數 x, y 滿足

$$x^3 + (x-4)^2 y + x(y-8)^2 + y^3 = 8(x-y+1)^2 + 16(3x+2y),$$

求所有可能的 $x + y$ 。

113 學年度高級中學數學學科能力競賽

中投區複賽試題（一）解答

一、【解】

$$\text{使用 3 色：} c_3^6 = 20$$

$$\text{使用 4 色：} c_4^6 \times c_2^4 = 90$$

$$\text{使用 5 色：} c_5^6 \times c_1^5 \times 4_1^1 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = 90$$

$$\text{使用 6 色：} 6_1^1 \times \frac{1}{24} = 30$$

24 為旋轉的重複數，共有 $20+90+90+30=230$ 個上色方式

二、【解】

令 $y=10^x$ ，則 $y>0$ 且

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}y\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}y\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{3}y\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}y\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}y+\frac{\sqrt{2}}{8}=0$$

$$\left[\sin\left(-\frac{2\pi}{3}y\right)+\cos\left(-\frac{2\pi}{3}y\right)\right]\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}y\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}y+\frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}y\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(-\frac{2\pi}{3}y\right)\right]\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}y\right)=y+\frac{1}{4}$$

$$2\left[\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}y\right)+\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(-\frac{2\pi}{3}y\right)\right]\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}y\right)=y+\frac{1}{4}$$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}y\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}y\right)=y+\frac{1}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4\pi}{3}y\right)=y+\frac{1}{4}$$

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}y\right)=y+\frac{1}{4}$$

$$\text{再令 } \omega = \frac{4\pi}{3}y, \text{ 然後得 } \cos \omega = \frac{3}{4\pi}\omega + \frac{1}{4} \dots (*)$$

當 $\omega > \pi$ ， $\frac{3}{4\pi}\omega + \frac{1}{4} > 1$ ，且 $\frac{3}{4\pi}\omega + \frac{1}{4} > 0$

所以 ω 只會存在於 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ，又因為

$\cos \omega$ 及 $\frac{3}{4\pi}\omega + \frac{1}{4}$ 都嚴格遞增，故 $\omega = \frac{\pi}{3}$ 是方程式(*)的唯一正解。

$$\text{即 } y = \frac{1}{4} \Rightarrow 10^x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \log_{10} 10^x = \log_{10} \frac{1}{4} \Rightarrow x = -2 \log_{10} 2$$

三、【解】

正三角形形邊長 1, 2, 3, 4, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$ 分別為 16, 7, 3, 1, 6, 2，共 35 個。

所以認取三點可以構成 Δ 的機率為 $\frac{35}{\binom{15}{3}} = \frac{1}{13}$

四、【解】

令 $h(x) = \alpha x^2 + \beta x + r$ 是一個二次多項式

$$\text{且 } h(3) = 30, h(b) = 99, h(9) = 204$$

$$\text{解得 } h(x) = 2x^2 + 5x - 3$$

$$\text{令 } g(x) = f(x) - 2x^2 - 5x + 3$$

$$\text{則 } g(3) = g(b) = g(9) = 0, \deg g(x) = \deg f(x)$$

$$\text{所以 } g(x) = (x-3)(x-6)(x-9)(x+a)$$

$$f(x) = g(x) + 2x^2 + 5x - 3$$

因此

$$= (x-3)(x-6)(x-9)(x+a) + 2x^2 + 5x - 3$$

$$f(-1) = (-4)(-7)(-10)(-1+a) - 6$$

$$f(13) = 10 \cdot 7 \cdot 4(13+a) + 400$$

$$\text{得 } f(-1) + f(13) = 280 \cdot 14 + 394 = 4314.$$

五、【解】

因為 b 與 2, 3 均互質， b 必型如 $6k \pm 1$ 。又 $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ 。

Case 1. $n < 3$ ，，則 $a + 2024 = 2^n(3^{4-n}b + 2^{3-n} \cdot 11 \cdot 23)$ ，括號內的數很明顯與 2, 3 均互質，因此 $f(a + 2024) = n < 4$ 。

Case 2. $n = 3$ ，則 $a + 2024 = 2^3(3b + 11 \cdot 23)$ ，括號內的數必為偶數，因此 $f(a + 2024) \geq 4$ 。此時 b 為形如 $6k \pm 1$ 的正整數，使得 $1 \leq a \leq 2024$ ，滿足這樣的 b 共 28 個。

Case 3. $n = 4$ ，則 $a + 2024 = 2^3(2b + 11 \cdot 23)$ ，欲滿足 $f(a + 2024) \geq 4$ ， $2b + 11 \cdot 23$ 必為 3 的倍數，即 $b \equiv 1 \pmod{3}$ ，所以 b 只能型如 $6k + 1$ 。滿足這樣的 b 共有 21 個。

總結上述，共有 49 個這樣的正整數。

113 學年度高級中學數學學科能力競賽

中投區複賽試題（二）解答

一、【解】

$$\because 1 = (2a + b + c)^2$$

$$= 4a^2 + b^2 + c^2 + 2(2ab + bc + 2ca)$$

$$\therefore 2ab + bc + 2ca = 1 - (4a^2 + b^2 + c^2)$$

只需求 $4a^2 + b^2 + c^2$ 的最小值

即可求得 $2ab + bc + 2ca$ 的最大值

$$\text{由柯西不等式 } (4a^2 + b^2 + c^2)(1+1+1) \geq (2a+b+c)^2 = 1$$

$$\text{得 } 4a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}, \text{ 其中等號成立於 } \frac{2a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{1} \text{ 即 } a = \frac{1}{6}, b = c = \frac{1}{3}$$

$$\text{得 } 4a^2 + b^2 + c^2 \text{ 的最小值為 } \frac{1}{3}, \quad 2ab + bc + 2ca \text{ 的最小值為 } \frac{1}{3}.$$

二、【解】

由內角線性質知

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{2}{1}, \quad \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{1}{3}, \text{ 若設 } \overline{AD} = a, \overline{AE} = b, \text{ 則 } \overline{AC} = 3a, \overline{AB} = 2b$$

再由餘弦定理(設 $\angle BAD = \angle DAE = \angle EAC = \theta$)

$$\cos \theta = \frac{(2b)^2 + a^2 - 2^2}{2 \cdot 2b \cdot a}, \quad \cos \theta = \frac{a^2 + b^2 - 1^2}{2 \cdot a \cdot b}, \quad \cos \theta = \frac{(b)^2 + (3a)^2 - 3^2}{2 \cdot b \cdot 3a}$$

$$\text{可得到 } \frac{4b^2 + a^2 - 4}{4ab} = \frac{a^2 + b^2 - 1}{2ab} = \frac{b^2 + 9a^2 - a}{6ab}$$

$$\text{進而得 } \begin{cases} 4b^2 + a^2 - 4 = 2(a^2 + b^2 - 1) \\ 3(a^2 + b^2 - 1) = b^2 + 9a^2 + 9 \end{cases} \quad \text{整理可得 } \begin{cases} a^2 - 2b^2 = -2 \\ 6a^2 - 2b^2 = 6 \end{cases}$$

$$\text{解得 } a^2 = \frac{8}{5}, b^2 = \frac{9}{5} \quad \text{即 } a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, b = \frac{3}{\sqrt{5}} \quad \text{即 } a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, b = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \theta = \frac{a^2 + b^2 - 1}{2ab} = \frac{\frac{8}{5} + \frac{9}{5} - 1}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{即 } \theta = 45^\circ$$

$$\angle BAC = 135^\circ \quad \Delta ABC \text{ 面積} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \sin 135^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{18}{5}.$$

三、【解】

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}$$

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q} = \frac{4}{n+2} \Rightarrow q > p+1 \text{ 且 } (q, p+1) = 1$$

$$\frac{q-p-1}{q(p+1)} = \frac{4}{n+2}$$

$$(q, q-p-1) = (q, p+1) = 1, (p+1, q-p-1)(p+1, q) = 1$$

$$(q-p-1) \mid 4 \Rightarrow q-p = 2, 3 \text{ or } 5.$$

四、【解】

$$ab = 1 - bc - ac \Rightarrow b^2c + a = a^2b + c = a - abc - a^2c + c$$

$$c(b^2 + a^2 + ab - 1) = 0$$

$$\text{如果 } c = 0 \Rightarrow ab = 1, a^2b = b \quad a = b = \pm 1 \quad \dots (1)$$

$$b^2 + a^2 + ab = 1 \quad \dots (2)$$

$$a = 0, b = 0, c = 0 \text{ 相同方式}$$

$$\text{假設 } a, b, c \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + ab = 1 \\ b^2 + c^2 + bc = 1 \\ c^2 + a^2 + ac = 1 \\ ab + bc + ca = 1 \end{cases}$$

$$2(a^2 + b^2 + c^2) = 2 = 2(ab + bc + ac)$$

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$$

$$\rightarrow a = b = c = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

結論

$$(0, 1, 1), (0, -1, -1), (1, 0, 1), (-1, 0, -1), (1, 1, 0), (-1, -1, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

共 8 組。

五、【解】

$$f(x) = \log_8 x$$

證明： $x=0$ 代入可得 $f(1)=0$ ，因此 $f(4^x) + f(2^x) = x \cdots (*)$ 。

我們證明 $f(x) = \log_8 x$ 對所有的 $x \in [1, \infty)$ 均成立。假設存在 $a > 1$ 使得 $f(a) = \log_8 a + c$ ，

其中 c 為某一個不為 0 的實數。令 $b = \log_8 a$ ，則 $b > 0$ 且 $a = 8^b$ 。

由 (*) 可知， $f(2^x) - \frac{x}{3} = -(f(4^x) - \frac{2x}{3})$ ，將 $x = b/2$ 代入可得

$f(2^{b/2}) - b/6 = -(f(2^b) - b/3) = -c$ ，即 $f(2^{b/2}) = b/6 - c$ 。利用數學歸納法原理可得

$f(2^{b/2^n}) = b/(3 \cdot 2^n) + (-1)^n c$ ，對所有非負整數 n 均成立。

由此可得， $f(2^{b/2^n}) - f(2^{b/2^{n+1}}) = b/(3 \cdot 2^{n+1}) + (-1)^n \cdot 2c$ 。考慮適當 n 的奇偶性使得

$(-1)^n \cdot c < 0$ ，則當 n 足夠大時， $b/(3 \cdot 2^{n+1}) + (-1)^n \cdot 2c < 0$ ，即 $f(2^{b/2^n}) < f(2^{b/2^{n+1}})$ ，

此與 f 的遞增性矛盾，因此， $f(x) = \log_8 x$ 對所有的 $x \in [1, \infty)$ 均成立。

六、【解】

$$\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$= 2 \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} + 2 \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

$$= 2 \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \left(\cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} + \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right)$$

$$\leq 2 \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \left(1 + \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right)$$

$$= 2 \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \cdot 2 \cos^2 \frac{\theta_1 + \theta_2}{4}$$

$$= 8 \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{4} \cos^3 \frac{\theta_1 + \theta_2}{4}$$

$$\text{令 } \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{4} = a, \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{4} = b,$$

$$\text{則 } a^2 + b^2 = 1, \text{ 由算幾不等式 } 1 = a^2 + \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{3}b^2 \geq 4 \cdot \sqrt[4]{a^2 \cdot (\frac{1}{3}b^2)^3}$$

$$\text{可得 } (\frac{1}{4})^4 \geq \frac{a^2 b^2}{27} \text{ 得 } ab^3 \leq \frac{\sqrt[3]{3}}{16}$$

$$\text{其中等號成立於 } a^2 = \frac{1}{3}b^2 \text{ 即 } a^2 = \frac{1}{4}, \text{ 亦即 } a = \frac{1}{2}$$

$$\text{最大值為 } \frac{\sqrt[3]{3}}{2}.$$

七、【解】

$$\text{由原式得 } (x^2 + y^2)(x + y - 8) = 8(xy + 1) \cdots (*)$$

$$x = 0 \text{ 或 } y = 0 \text{ 無解 故可設 } x \neq 0, y \neq 0 \text{ 利用 } x^2 + y^2 \geq 2|x||y|$$

$$\text{假設 } x + y - 8 \geq 0, \text{ 由 } (*) \quad 8(xy + 1) \geq (x + y - 8) \geq 2|x||y|$$

$$\therefore |x||y| \geq 2 \therefore x + y - 8 \leq 6$$

$$\text{假設 } x + y < 0, \text{ 由 } (*) \quad 8(xy + 1) \leq (x + y - 8) \cdot 2|x||y| \therefore x + y - 8 \geq -3$$

$$\therefore -3 \leq x + y - 8 \leq 6$$

$$\therefore 5 \leq x + y \leq 14 \cdots (**)$$

$$\text{由 } (*) (**) \text{ 知 } 21x^2 + y^2 \text{ 故 } x, y \text{ 同奇或同偶}$$

$$\text{所以 } x + y = 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14$$

$$\text{若 } x + y = 10, \text{ 則 } x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 100 - 2xy \text{ 代入 } (*)$$

$$(100 - 2xy) \cdot 2 = 8(xy + 1) \text{ 得 } xy = 16 \text{ 所以 } \begin{cases} x - 2 & x = 8 \\ & \text{或} \\ y - 8 & y = 2 \end{cases}$$

$$\text{若 } x + y = 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \text{ 代入 } (*) \text{ 無整數解。}$$

113 學年度高級中學數學學科能力競賽

彰雲嘉區複賽試題（一）

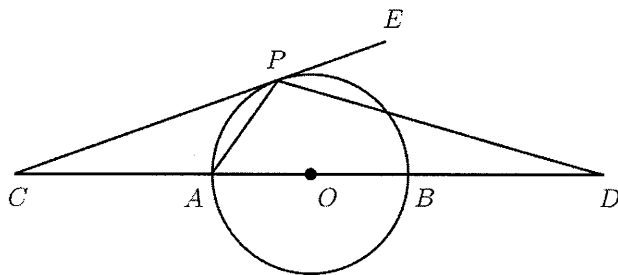
編號：_____

（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共五題計算證明題，滿分為四十九分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

- 一、如圖 $\overline{AB}$ 是圓 O 的直徑，將 $\overline{AB}$ 延長並在直線上且於圓的外部取兩點 C 與 D 使得 $\overline{CA} = \overline{AB} = \overline{BD}$ ，過 C 作圓 O 的切線 $\overline{CE}$ ，其中 P 為切點，試證： $\angle CPA = \angle EPD$ 。



- 二、令 $f(0) = f(1) = 1$ 且令 $f(n+1) = 2f(n) - f(n-1) + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ ，
(10 分) 其中 n 為正整數，求 $f(n)$ 之值。

- 三、求所有實數 x 滿足方程式 $\sqrt{1+\sqrt{x}} = \sqrt[3]{x-1}$ 。
(10 分)

- 四、從 1 到 100 的整數當中隨機選取三個數（每個數不可重複選取），試求這三個
(10 分) 數能構成一個等差數列的機率是多少？

- 五、假設正實數數列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 滿足 $(4x_2 - 3x_1)x_1^3 = 4$ 且
(9 分)

$$x_{k+1}x_{k-1} - x_k^2 = \frac{x_{k-1}^4 - x_k^4}{(x_k x_{k-1})^3}, \quad k \geq 2.$$

找正實數 a 使得當 $x_1 > a$ 時， $x_1 > x_2 > \cdots > x_n > \cdots$ ，
且當 $0 < x_1 < a$ 時， $x_2 > x_1$ 且 $x_2 > x_3 > \cdots > x_n > \cdots$ 。

113 學年度高級中學數學學科能力競賽

彰雲嘉區複賽試題 (二)

編號：_____

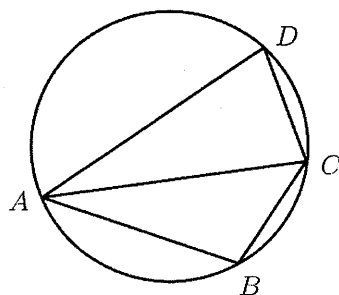
(時間一小時)

注意事項：

1. 本試卷共六題填充題，滿分為二十一分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、若 m 為 $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2$ 在平面 $x + y + z = 4$ 上之最小值，
(3.5 分) 則 $m =$ _____。

二、如圖，一圓上有四點 A, B, C, D 滿足 $\overline{BC} = \overline{CD}$ 以及
(3.5 分) $\overline{AB} = 5, \overline{AC} = 7, \overline{AD} = 8$ ，則此圓之面積為_____。



三、已知空間三點 $A(-3, -2, 1), B(3, 1, 1), C(-1, 0, 2)$ 決定唯一平面，
(3.5 分) 則在這個平面上，三角形 $\triangle ABC$ 內切圓的半徑為_____。

四、一個特殊的密碼鎖，其密碼是由 0 到 9 的五個相異數字組成，當輸入密碼
(3.5 分) 時，每碼須相異且至少三個位置的數字配對正確，鎖就能被打開。
試求一位小偷依規則任意輸入一個密碼且成功開鎖的機率為_____。
(例如：密碼為 01234，輸入 08274 可打開，但輸入 08247 無法打開)

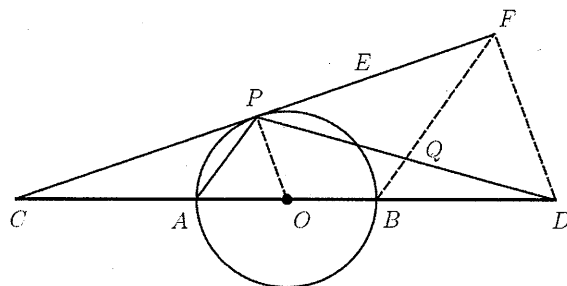
五、給定圓周上逆時針依序的 7 個點 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_7$ ，考慮各種可能從 P_1 開始連
(3 分) 直線到下一點，一直到所有 6 個點都連接完，再連回 P_1 這樣的「偽 7 邊形」。
舉例來說， $P_1P_2P_3P_4P_7P_6P_5P_1$ 就是一個可能的連法，而這個「偽 7 邊形」在
圓內有一個交點。試問所有「偽 7 邊形」中，在圓內最多有_____個交點。

六、已知 $S = abcd, T = dcba, a, d \in \{1, 2, \dots, 9\}, b, c \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$
(4 分) 是兩個四位數且 $S > T$ ，假設 S 與 T 都是 7 的倍數，而且當 S 與 T 被 37 除時具有相同的餘數，則 S 所有可能的數字為_____。

一、【解】

如圖延長 $\overline{CE}$ 使得 $\overline{CP} = \overline{PF}$ ，連接 $\overline{PO}$ ， $\overline{FB}$ 與 $\overline{FD}$ 。而

$\overline{PD}$ 與 $\overline{FB}$ 的交點記為 Q 。



(1) 因為 P 為直線 $\overline{CF}$ 對於圓 O 的切點，所以 $\overline{CF} \perp \overline{PO}$ 。

(2) 因為 $\overline{CP} = \overline{PF}$ 以及 $\overline{CO} = \overline{OD}$ ，所以 $\overline{PO}$ 與 $\overline{FD}$ 平

行，由(1)知 $\overline{CF} \perp \overline{PO}$ ，故 $\overline{CF} \perp \overline{FD}$ 。

(3) 因為 $\overline{CA} = \overline{AB}$ 以及 $\overline{CP} = \overline{PF}$ ，所以 $\overline{PA}$ 與 $\overline{FB}$ 平行。

(4) 從 $\triangle PAD$ 來看，因為 B 是 $\overline{AD}$ 中點，而 $\overline{PA}$ 平行於 $\overline{QB}$ ，所以 Q 為 $\overline{PD}$ 中點。

(5) 從 $\triangle PDF$ 來看，它是直角三角形，而且 Q 是斜邊上的中點，所以 $\overline{PQ} = \overline{FQ}$ ，故 $\angle CPA = \angle PFQ = \angle FPQ = \angle EPD$ 。

二、【解】

設 $g(n) = f(n+1) - f(n) \quad \forall n \geq 0$ 。

因為 $f(n+1) - 2f(n) + f(n-1) = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ ，

所以 $g(n) - g(n-1) = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ ， $\forall n \geq \mathbb{N}$

因此

$$\begin{aligned} g(n) - g(0) &= \sum_{k=1}^n (g(k) - g(k-1)) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \end{aligned}$$

但是 $g(0) = f(1) - f(0) = 0$ ，

所以 $g(n) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \quad \forall n \geq 0$ 。

此外 $g(n) = f(n+1) - f(n) \quad \forall n \geq 0$ 。因此

$$\begin{aligned}
f(n) - f(0) &= \sum_{k=0}^{n-1} (f(k+1) - f(k)) = \sum_{k=0}^{n-1} g(k) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2(k+1)(k+2)} \right) \\
&= \frac{n}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{n}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\
&= \frac{n}{4} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{n}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)}
\end{aligned}$$

$$\text{所以 } f(n) = \frac{n}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)} = \frac{n(n+1) + 2(n+1) + 2}{4(n+1)} = \frac{n^2 + 3n + 4}{4(n+1)}$$

三、【解】

設 $u = \sqrt[3]{x-1}$, 則 $x = u^3 + 1$ 原式可以改寫為

$$\sqrt{1 + \sqrt{u^3 + 1}} = u$$

$$\sqrt{u^3 + 1} = u^2 - 1$$

$$(u+1)(u^2 - u + 1) = u^3 + 1 = (u+1)^2(u-1)^2$$

所以 u 滿足下列方程式

$$(u+1)(u^2 - u + 1) - (u+1)^2(u-1)^2 = 0$$

$$(u+1)[u^2 - u + 1 - (u+1)(u^2 - 2u + 1)] = 0$$

$$(u+1)[u^2 - u + 1 - (u^3 - u^2 - u + 1)] = 0$$

$$u^2(u+1)(-u+2) = 0$$

解出 $u = -1, 0, 2$. 代回 $u = \sqrt[3]{x-1}$, 得 $x = 0, 1, 9$.

由題目知道 $x \geq 1$, 所以 $x = 1$ 或是 $x = 9$.

(a) 當 $x = 1$ 時, $\sqrt{1 + \sqrt{1}} \neq \sqrt[3]{1}$.

(b) 當 $x = 9$ 時, $\sqrt{1 + \sqrt{9}} = 2 = \sqrt[3]{9-1}$.

故 $x = 9$ 是唯一解。

四、【解】

以中間數的選擇說明。若選擇了中間數, 且決定了公差, 即可得到一組三個數的等差數列。

若中間數為 1, 則三數無法構成等差數列

若中間數為 2, 則三數構成等差數列的公差僅可為 1

若中間數為 3, 則三數構成等差數列的公差可為 1 至 2 的任一數

若中間數為 4, 則三數構成等差數列的公差可為 1 至 3 的任一數

...

若中間數為 50，則三數構成等差數列的公差可為 1 至 49 的任一數

若中間數為 51，則三數構成等差數列的公差可為 1 至 49 的任一數

...

若中間數為 98，則三數構成等差數列的公差可為 1 至 2 的任一數

若中間數為 99，則三數構成等差數列的公差僅可為 1

若中間數為 100，則三數無法構成等差數列

因此隨機選取三個數可構成一個等差數列的機率為

$$\begin{aligned} & \frac{1+2+3+\cdots+48+49+49+48+\cdots+3+2+1}{C_3^{100}} = \frac{2 \times (1+2+3+\cdots+48+49)}{C_3^{100}} \\ & = \frac{49 \times (1+49)}{C_3^{100}} = \frac{2450}{161700} = \frac{49}{3234} = \frac{1}{66} \end{aligned}$$

五、【解】

$$\text{由 } x_{k+1}x_{k-1} - x_k^2 = \frac{x_{k-1}^4 - x_k^4}{(x_kx_{k-1})^3}, \text{ 得}$$

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} - \frac{x_k}{x_{k-1}} = \frac{1}{x_k^4} - \frac{1}{x_{k-1}^4}$$

$$\text{或 } \frac{x_{k+1}}{x_k} - \frac{1}{x_k^4} = \frac{x_k}{x_{k-1}} - \frac{1}{x_{k-1}^4} = \cdots = \frac{x_2}{x_1} - \frac{1}{x_1^4} = \frac{3}{4}$$

$$\text{因此 } x_{k+1} = \frac{3}{4}x_k + \frac{1}{x_k^3}, \text{ 且當 } x_1 > 0, x_k > 0, k \geq 2.$$

$$\text{由 } x_{k+1} - x_k = x_k \left(\frac{1}{x_k^4} - \frac{1}{4} \right), \text{ 可得當 } \frac{1}{x_k^4} - \frac{1}{4} < 0, \text{ 即 } x_k > \sqrt{2},$$

則 $x_{k+1} < x_k, k \geq 1$, 此外

$$x_{k+1} = \frac{3}{4}x_k + \frac{1}{x_k^3} \geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{4^3}} = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2}, \text{ 所以當 } x_k = \sqrt{2}, \text{ 等號成立。}$$

因此，若取 $a = \sqrt{2}$ ，則有：如果 $x_1 > \sqrt{2}$ ，則 $x_1 > x_2 > \cdots > x_n > \cdots$ ，

如果 $x_1 < \sqrt{2}$ ，則 $x_2 > x_1$ ，且 $x_2 > x_3 > \cdots > x_n > \cdots$ 。

一、【解】

由柯西不等式，知

$$4 = x + y + z = x + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}y) + \frac{1}{2}(2z) \leq \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \sqrt{x^2 + 2y^2 + 4z^2}$$

$$\text{因此 } x^2 + 2y^2 + 4z^2 \geq \frac{16}{\frac{7}{4}} = \frac{64}{7}, \text{ 所以 } m = \frac{64}{7}.$$

二、【解】

因為 $\overline{BC} = \overline{CD}$ ，所以 $\angle BAC = \angle CAD$ 。假設 $\overline{BC} = \overline{CD} = x$ 以及 $\angle BAC = \angle CAD = \theta$ ，

利用餘弦定理得到

$$x^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos \theta$$

$$x^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cos \theta$$

兩式相減得到 $25 - 64 + 42 \cos \theta = 0$ ，於是 $\cos \theta = \frac{39}{42} = \frac{13}{14}$ ，由此可得

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{13}{14}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

以及

$$x^2 = 49 + 25 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{13}{14} = 9 \Rightarrow x = 3.$$

假設 R 為圓的半徑，由正弦定理得到

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)} = 2R \Rightarrow \frac{x}{\sin \theta} = 2R \Rightarrow \frac{3}{\frac{3\sqrt{3}}{14}} = 2R \Rightarrow R = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7}{3}\sqrt{3}.$$

因此圓面積為 $\pi R^2 = \frac{49}{3}\pi$ 。

三、【解】

$$\overrightarrow{BA} = (-6, -3, 0), \overrightarrow{BC} = (-4, -1, 1), \overrightarrow{AC} = (2, 2, 1)$$

$$\overline{BA} = 3\sqrt{5}, \overline{BC} = 3\sqrt{2}, \overline{AC} = 3,$$

$$\theta = \angle CBA, \cos \theta = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{27}{3\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}, \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$A \text{ 到直線 } BC \text{ 的距離是 } \overline{BA} \sin \theta = 3\sqrt{5} \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{2}},$$

$$\text{三角形 } \triangle ABC \text{ 的面積為 } \frac{1}{2} \times (A \text{ 到直線 } BC \text{ 的距離}) \times \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot 3\sqrt{2}$$

$$= \frac{9}{2} = \frac{r}{2} (\overline{BA} + \overline{BC} + \overline{AC}) = \frac{r}{2} (3\sqrt{5} + 3\sqrt{2} + 3),$$

$$\Rightarrow r = \frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{2} + 1}$$

四、【解】

- 五碼全在正確位置：共 1 種

- 恰有四碼在正確位置：共 25 種

$$C_4^5 \times C_1^5 = 5 \times 5 = 25$$

- 恰有三碼在正確位置：共 310 種

$$C_3^5 \times 1 = 10 \times 1 = 10 \quad (\text{五碼數字皆正確，但僅有三碼於正確位置，另兩碼位置錯誤})$$

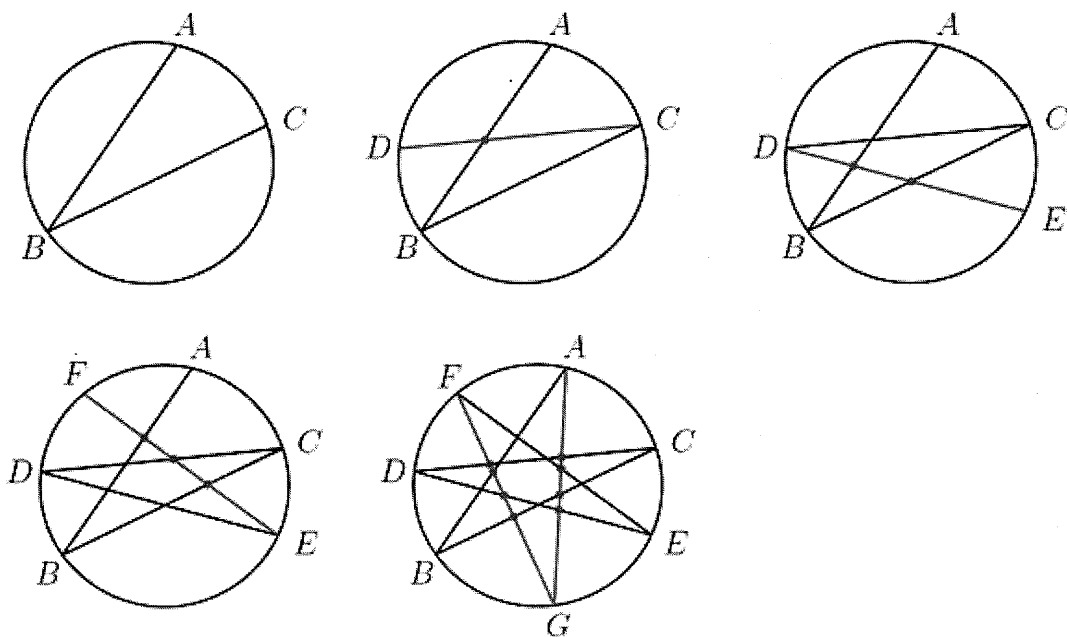
$$C_3^5 \times C_1^2 \times C_1^5 = 10 \times 2 \times 5 = 100 \quad (\text{五碼中有四碼數字正確，但僅有三碼於正確位置})$$

$$C_3^5 \times C_2^5 \times 2! = 10 \times 10 \times 2 = 200 \quad (\text{五碼中有三碼數字正確且在正確位置})$$

$$\text{因此隨意輸入一個密碼且能成功開鎖的機率為 } \frac{1+25+310}{C_5^{10} \times 5!} = \frac{336}{30240} = \frac{1}{90}$$

五、【解】

如下圖所示，可造出最多交點的偽七邊形。



- (1) 先在圓周上標記三點 A, B, C ，連接 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 。注意到：兩線段若有相同的頂點，則線段不會在內部有交點。
- (2) 現在希望由 C 出發畫出線段 $\overline{CD}$ 並且產生交點，因為這個線段無法與 $\overline{BC}$ 在內部有交點（兩線段有同頂點 C ），所以這個線段只能和 $\overline{AB}$ 有交點。因為 $\overline{AB}$ 將圓弧分成兩部分，當 C 和 D 落在不同的圓弧，則會產生 1 個交點。
- (3) 現在希望由 D 出發畫出線段 $\overline{DE}$ 並與前面的線段產生最多交點，根據前一步驟的觀察可發現：點 E 必須要在 $\overline{AB}$ 分成的兩圓弧中不在 D 的那一側，也必須在 $\overline{BC}$ 分成的兩圓弧中不在 D 的那一側，這樣可得 2 個交點。
- (4) 現在希望由 E 出發畫出線段 $\overline{EF}$ 並與前面的線段產生最多交點，根據前一步驟的觀察可發現：點 F 必須在 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ 分成的兩圓弧中不在 E 的那一側，這樣可得 3 個交點。
- (5) 現在希望由 F 出發畫出線段 $\overline{FG}$ ，然後還要連出 $\overline{GA}$ ，並與前面的線段產生最多交點。一方面，點 G 必須在 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}$ 分成的兩圓弧中不在 F 的那一側，這樣可得 4 個交點。另一方面，因為 $\overline{GA}$ 不可能和 $\overline{AB}, \overline{FG}$ 有交點（分別都有同頂點），所以 $\overline{GA}$ 最多只能和 $\overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}$ 相交，此時，點 G 也必須在 $\overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}$ 分成的兩圓弧中不在 A 的那一側，這樣可得 4 個交點。
- (6) 由上討論，將這個偽七邊形的頂點重新以逆時針方式標記為 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ ，而這個偽七邊形有 $1+2+3+4+4=14$ 個交點，並且達到最多交點數。

六、【解】

$$S = 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d$$

$$T = 1000 \cdot d + 100 \cdot c + 10 \cdot b + a$$

$$\because 37 \mid S - T = 999(a - d) + 90(b - c)$$

$$\because 37 \mid 999, \gcd(90, 37) = 1$$

$$\therefore 37 \mid b - c$$

$$\therefore b = c$$

$$\because 7 \mid S, 7 \mid T$$

$$\therefore 7 \mid S - T = 999(a - d)$$

$$\because \gcd(7, 999) = 1$$

$$\therefore 7 \mid a - d$$

$$\therefore \begin{cases} a = 9 \\ d = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 8 \\ d = 1 \end{cases}$$

當 $a = 9, d = 2$ $S = 9000 + 110b + 2 \equiv 0 \pmod{7}$ 得 $b = 0$ 或 7

當 $a = 8, d = 1$ $S = 8000 + 110b + 1 \equiv 0 \pmod{7}$ 得 $b = 0$ 或 7

故 $S = 9002, 9772, 8001, 8771$

113 學年度台南區高級中學數學科能力競賽試題 (一)

注意事項：

- (1) 作答時間：2 小時，不可使用電算器。
- (2) 本試卷共五題，滿分 49 分，第一題 9 分，其餘題目各 10 分。
- (3) 須將計算及證明過程依序寫在答案卷上。
- (4) 試題紙及計算紙必須連同答案卷一併繳回。
- (5) 需使用黑色或藍色筆作答。

一、 $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC} = \overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{AB}$ ，若 P 點在 $\overline{AB}$ 上使得 $\overline{PA} = 3\overline{BP}$ ，試證：

$$\angle CAP = 2\angle CPA。$$

二、在 $\triangle ABC$ 中，試求下列 S 的整數部分：

$$S = \sqrt{3 \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + 1} + \sqrt{3 \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + 1} + \sqrt{3 \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} + 1}。$$

三、設 x, y, z 是滿足下列方程組的三個非零實數，

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 - x + 1} = \frac{x(y+z)}{yz} \\ \sqrt{4y^2 - y + 1} = \frac{y(z+x)}{zx} \\ \sqrt{5z^2 - z + 1} = \frac{z(x+y)}{xy} \end{cases}$$

試求出所有可能的實數數對 (x, y, z) 。

四、已知函數 $f(x, y)$ 滿足下列條件：

- (i) $f(0, y) = y + 1$
- (ii) $f(x + 1, 0) = f(x, 1)$
- (iii) $f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y))$

試求函數 $f(3, 2024)$ 之值。

五、假設 $f(x) = 3x^2 + 1$ ，證明：對任意正整數 n ，下列乘積

$$f(1)f(2)f(3) \dots f(n)$$

至多有 n 個不同的質因數。

113 學年度台南區高級中學數學科能力競賽試題 (二)

注意事項：

- (1) 作答時間：1 小時，不可使用電算器。
- (2) 本試卷共六題填充題，前三題每題 3 分，後三題每題 4 分，滿分 21 分。
- (3) 請將答案寫在答案卷上對應的欄位。
- (4) 試題紙與計算紙必須連同答案卷一併繳回。
- (5) 需使用黑色或藍色筆作答。

一、已知 $\{a_n\}$ 為等比數列，對任意正整數 n ，都有 $a_n > 0$ ，且令

$S_n = \log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_n$ 。如果 $S_m = S_n$ ，其中 m, n 為相異正整數，則此時 S_{m+n} 之值為 (一)。

二、在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC} = 2$ ，如果 $\overline{BC}$ 邊上有 2024 個相異的點 $P_1, P_2, \dots, P_{2024}$ ，且設 $a_k = \overline{AP_k}^2 + \overline{BP_k} \cdot \overline{P_kC}$ ，其中 $k = 1, 2, \dots, 2024$ ，則 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2024}$ 之值為 (二)。

三、設 $f: R \rightarrow R$ 是一個實數值函數滿足下列兩條件：

- (1) 對任意實數 x, y ，恆有 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$
- (2) $f(-2)f(2) \geq 16$

則 $f(2) + 4f\left(\frac{1}{3}\right) - 5f\left(\frac{2}{3}\right)$ 之值為 (三)。

四、設 $O(0,0), A(1,2), B(2,1)$ ， P 點是線段 $\overline{AB}$ 的一個動點，滿足條件

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} \geq \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$$

若 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$ ，則 λ 的最小值為 (四)。

五、已知正整數 m, n 滿足 $n = \sqrt{m-184} + \sqrt{m+24}$ ，則當 n 有最大值時， m 之值為 (五)。

六、對任何一個正整數 A ，假設 B 是把所有 A 的數字相加得到的整數， C 是把 B 中所有數字相加得到的整數，而 D 是把 C 中所有數字相加得到的整數。例如說當 $A=98765$ ，則 $B=9+8+7+6+5=35$ ， $C=3+5=8$ ， D 也是 8。

如果 $A=2024^{113} + 113^{2024}$ ，則 D 的值是 (六)。

【口試題】

已知 f 是定義域和值域都是非負整數的函數 f 滿足 $f(f(x))=x$,
 $f(xy+1)=f(x)f(y)+1$ 。試證:如果 p 是質數, 則 $f(p)$ 也是質數。

【口試題】

設 a, b, c 為非負實數, 且滿足 $a+b+c=3$, 試證: $\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} \geq \frac{3}{2}$; 又
等號何時成立?

113 學年度台南區高級中學數學科能力競賽試題（一）參考解答

注意事項：

- (1) 作答時間：2 小時，不可使用電算器。
- (2) 本試卷共五題，滿分 49 分，第一題 9 分，其餘題目各 10 分。
- (3) 須將計算及證明過程依序寫在答案卷上。
- (4) 試題紙及計算紙必須連同答案卷一併繳回。
- (5) 需使用黑色或藍色筆作答。

一、 $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC} = \overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{AB}$ ，若 P 點在 $\overline{AB}$ 上使得 $\overline{PA} = 3\overline{BP}$ ，試證：

$$\angle CAP = 2\angle CPA。$$

【參考解答】 令 $\overline{BP} = x$ ， $\overline{AC} = y \Rightarrow \overline{AB} = 4x$ ， $\overline{BC} = 2x + y$

$$\Rightarrow \cos \angle CAP = \frac{(4x)^2 + y^2 - (2x + y)^2}{2 \cdot 4x \cdot y} = \frac{12x^2 - 4xy}{8xy} = \frac{3x^2 - xy}{2xy}$$

$$\text{又 } \cos \angle CAP = \frac{(3x)^2 + y^2 - \overline{CP}^2}{2 \cdot 3x \cdot y}$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2 - xy}{2xy} = \frac{(3x)^2 + y^2 - \overline{CP}^2}{2 \cdot 3x \cdot y} \Rightarrow \overline{CP}^2 = y^2 + 3xy$$

$$\cos \angle CPA = \frac{(y^2 + 3xy) + (3x)^2 - y^2}{2 \cdot \sqrt{y^2 + 3xy} \cdot 3x} = \frac{xy + 3x^2}{2x\sqrt{y^2 + 3xy}}$$

$$= \frac{y + 3x}{2\sqrt{y^2 + 3xy}} = \frac{\sqrt{y + 3x}}{2\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{y + 3x}{4y}}$$

$$\cos \angle CAP - 2\cos^2 \angle CPA + 1 = \frac{3x^2 - xy}{2xy} - 2 \cdot \frac{y + 3x}{4y} + 1 = \frac{3x - y}{2y} - \frac{y + 3x}{2y} + 1 = 0$$

即 $\cos \angle CAP = 2\cos^2 \angle CPA - 1 = \cos 2\angle CPA \Rightarrow \angle CAP = 2\angle CPA$ ，故得證。



二、在 $\triangle ABC$ 中，試求下列 S 的整數部分：

$$S = \sqrt{3 \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + 1} + \sqrt{3 \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + 1} + \sqrt{3 \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} + 1}。$$

【參考解答】

在 $\triangle ABC$ 中， $\cot \frac{A}{2} = \tan \frac{B+C}{2} = \frac{\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}}{1 - \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}}$

所以， $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$ 。

由科西不等式得知

$$S \leq \sqrt{3 \left[\left(3 \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + 1 \right) + \left(3 \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + 1 \right) + \left(3 \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} + 1 \right) \right]}$$

$$= \sqrt{3 \times 6} = \sqrt{18} < 5$$

令 $x = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}$ ，則 $0 < x < 1$ ，故有 $\sqrt{3x+1} > x+1$ 。

因此， $\sqrt{3 \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + 1} > \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + 1$

$$\sqrt{3 \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + 1} > \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + 1, \quad \sqrt{3 \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} + 1} > \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} + 1$$

所以可得，

$$S > \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + 1 + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + 1 + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} + 1 = 4。$$

綜合以上， S 的整數部分為4。

三、設 x, y, z 是滿足下列方程組的三個非零實數，

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 - x + 1} = \frac{x(y+z)}{yz} \\ \sqrt{4y^2 - y + 1} = \frac{y(z+x)}{zx} \\ \sqrt{5z^2 - z + 1} = \frac{z(x+y)}{xy} \end{cases}$$

試求出所有可能的實數數對 (x, y, z) 。

【參考解答】：

$$\text{令 } \begin{cases} \sqrt{3x^2 - x + 1} = \frac{x(y+z)}{yz} & \dots\dots\dots(1) \\ \sqrt{4y^2 - y + 1} = \frac{y(z+x)}{zx} & \dots\dots\dots(2) \\ \sqrt{5z^2 - z + 1} = \frac{z(x+y)}{xy} & \dots\dots\dots(3) \end{cases}$$

$$\text{由(1)可得} \quad 3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \left(\frac{y+z}{yz} \right)^2 = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)^2 \quad \dots\dots\dots(4)$$

由(2)可得 $4 - \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} = \left(\frac{z+x}{zx} \right)^2 = \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right)^2$ (5)

由(2)可得 $5 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = \left(\frac{x+y}{xy} \right)^2 = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)^2$ (6)

令 $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$

則式子(4), (5), (6)可改寫成

$$\begin{cases} 3 - a + a^2 = (b+c)^2 & \text{.....(7)} \\ 4 - b + b^2 = (c+a)^2 & \text{.....(8)} \\ 5 - c + c^2 = (a+b)^2 & \text{.....(9)} \end{cases}$$

將(7) (8) (9)三式相加可得

$$(a+b+c)^2 = 12 - (a+b+c) \text{(10)}$$

令 $k = a+b+c$

則由 (10)式可得 $k^2 + k - 12 = 0$ 解之得 $k = 3$ 或 -4

接著我們考慮可能情形如下：

(1)當 $k = 3$ 時，則 $a+b+c = 3$ 。

(i) 因為 $b+c = 3-a$ ，代入(7)式可得 $3 - a + a^2 = (3-a)^2$ ，解之得 $a = \frac{6}{5}$ 。

(ii) 因為 $c+a = 3-b$ ，代入(8)式可得 $4 - b + b^2 = (3-b)^2$ ，解之得 $b = 1$ 。

(iii) 因為 $a+b = 3-c$ ，代入(9)式可得 $5 - c + c^2 = (3-c)^2$ ，解之得 $c = \frac{4}{5}$ 。

因為 $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$ ，所以我們可求得 $(x, y, z) = (\frac{5}{6}, 1, \frac{5}{4})$

(2)當 $k = -4$ 時，則 $a+b+c = -4$ 。

仿照如(1)的討論，可依序求得 $a = -\frac{13}{9}, b = -\frac{4}{3}, c = -\frac{11}{9}$

因為 $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$ ，所以我們可求得 $(x, y, z) = (-\frac{9}{13}, -\frac{3}{4}, -\frac{9}{11})$

綜合(1)和(2)的討論，可知所有可能的數對 (x, y, z) 為 $(\frac{5}{6}, 1, \frac{5}{4})$ 和 $(-\frac{9}{13}, -\frac{3}{4}, -\frac{9}{11})$ 。

四、已知函數 $f(x, y)$ 滿足下列條件：

- (i) $f(0, y) = y + 1$
- (ii) $f(x + 1, 0) = f(x, 1)$
- (iii) $f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y))$

試求函數 $f(3, 2024)$ 之值。

【參考解答】反覆用(iii)得到遞迴的結果

$$x=1, f(1, y) = f(0, f(1, y-1)) = f(1, y-1) + 1 = f(1, y-2) + 2 = \dots = f(1, 0) + y = f(0, 1) + y = y + 2$$

$$x=2, f(2, y) = f(1, f(2, y-1)) = f(2, y-1) + 2 = f(2, y-2) + 4 = \dots = f(2, 0) + 2y = f(1, 1) + 2y = 3 + 2y$$

$$x=3, f(3, y) = f(2, f(3, y-1)) = 2f(3, y-1) + 3 = 2[2f(3, y-2) + 3] + 3 = \dots = 2^y f(3, 0) + (2^{y-1} + 2^{y-2} + \dots + 1)3 = 2^y 5 + (2^y - 1)3 = 2^{y+3} - 3$$

$$\text{所以 } f(3, 2024) = 2^{2027} - 3$$

$$x=4, f(4, y) = f(3, f(4, y-1)) = 2^{f(4, y-1)+3} - 3$$

$$\text{令 } g(y) = f(4, y) + 3, \text{ 上式變成 } f(4, y) + 3 = 2^{f(4, y-1)+3}, g(y) = 2^{g(y-1)} =$$

$$2^{(2^{g(y-2)})} = 2^{(2^{\dots^{g(0)}\dots})} = 2^{(2^{\dots^{2^{16}}\dots})}。$$

$$\text{所以 } f(4, 2024) = 2^{(2^{\dots^{(2^{16})}})} - 3 \quad (2024 \text{ 個 } 2)。$$

五、假設 $f(x) = 3x^2 + 1$ ，證明：對任意正整數 n ，下列乘積

$$f(1)f(2)f(3) \dots f(n)$$

至多有 n 個不同的質因數。

【參考解答】利用數學歸納法，

當 $n = 1$ 時， $f(1) = 4$ 只有 1 個質因數 2，因此成立。

若能進一步證明：對任意的 $n \geq 2$ ， $f(n)$ 至多只有一個質因數 p ，使得

$$p \nmid f(1)f(2) \dots f(n-1)，$$

則依數學歸納法即可得證此問題。

利用反證法，假設 $f(n)$ 有兩個不同的質因數 p 和 q ，滿足 p 和 q 都不整除 $f(1)f(2) \dots f(n-1)$ 。

若 $1 < p < n$ ，由於

$$f(n-p) \equiv f(n) \equiv 0 \pmod{p}，$$

因此， $p \mid f(n-p)$ ，但 $1 \leq n-p < n$ ，這和 $p \nmid f(1)f(2) \dots f(n-1)$ 矛盾。

若 $p = n$ ，則 $p \mid 3p^2 + 1$ ，不成立。

若 $n < p < 2n$ ，則

$$f(n-p) \equiv 3(p-n)^2 + 1 \equiv 3n^2 + 1 = f(n) \equiv 0 \pmod{p}，$$

但 $0 < n-p < n$ ，這和 $p \nmid f(1)f(2) \dots f(n-1)$ 矛盾。

從上述可知 $p \geq 2n$ ，同理可得 $q \geq 2n$ 。因此， $f(n) \geq pq \geq 4n^2 > 3n^2 + 1$ ，此為矛盾。因此證得，對任意的 $n \geq 2$ ， $f(n)$ 至多只有一個質因數 p ，使得 $p \nmid f(1)f(2) \dots f(n-1)$ ；也就得證原題。

113 學年度台南區高級中學數學科能力競賽試題 (二) 參考解答

注意事項：

(1) 作答時間：1 小時，不可使用電算器。

(2) 本試卷共六題填充題，前三題每題 3 分，後三題每題 4 分，滿分 21 分。

(3) 請將答案寫在答案卷上對應的欄位。

(4) 試題紙與計算紙必須連同答案卷一併繳回。

(5) 需使用黑色或藍色筆作答。

一、已知 $\{a_n\}$ 為等比數列，對任意正整數 n ，都有 $a_n > 0$ ，且令

$S_n = \log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_n$ 。如果 $S_m = S_n$ ，其中 m, n 為相異正整數，則此時 S_{m+n} 之值為 (-)。

【參考解答】Ans: $S_{m+n} = 0$

令此等比數列之公比為 r ，因此 $a_k = a_1 r^{k-1}$ ，其中 $k = 1, 2, 3, 4, \dots$ 。

因為

$$S_n = \log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_n = \log(a_1 \cdot a_2 \cdots a_n) = \log a_1^n r^{1+2+\cdots+(n-1)} = \log a_1^n r^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

如果

$$S_m = S_n \Rightarrow \log a_1^m r^{\frac{m(m-1)}{2}} = \log a_1^n r^{\frac{n(n-1)}{2}} \Rightarrow a_1^m r^{\frac{m(m-1)}{2}} = a_1^n r^{\frac{n(n-1)}{2}} \Rightarrow a_1^{m-n} = r^{\frac{(n-m)(n+m-1)}{2}}。$$

$$\text{又 } n \neq m \Rightarrow a_1 = r^{\frac{(n-m)(n+m-1)}{2(m-n)}} \Rightarrow a_1 = r^{\frac{(1-n-m)}{2}}，\text{因此}$$

$$S_{m+n} = \log a_1^{m+n} r^{\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}} = \log(r^{\frac{1-m-n}{2}})^{m+n} r^{\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}} = \log r^0 = 0。$$

二、在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC} = 2$ ，如果 $\overline{BC}$ 邊上有 2024 個相異的點 $P_1, P_2, \dots,$

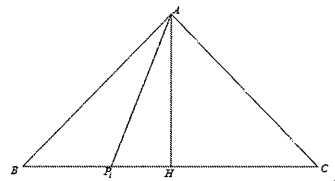
P_{2024} ，且設 $a_k = \overline{AP_k}^2 + \overline{BP_k} \cdot \overline{P_kC}$ ，其中 $k = 1, 2, \dots, 2024$ ，則

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2024}$ 之值為 (二)。

【參考解答】Ans: 8096

作 $\overline{AH} \perp \overline{BC} \therefore \overline{BH} = \overline{CH}$ 令 $\overline{BH} = \overline{CH} = x$ ， $\overline{HP_i} = a$

$\therefore$



$$a_i = \overline{AP_i}^2 + \overline{BP_i} \cdot \overline{P_iC} = \overline{AH}^2 + a^2 + (x-a)(x+a) = \overline{AH}^2 + a^2 + x^2 - a^2 = \overline{AH}^2 + x^2 = \overline{AC}^2 = 4$$

故 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2024} = 4 \times 2024 = 8096$ 。

三、設 $f: R \rightarrow R$ 是一個實數值函數滿足下列兩條件：

(1) 對任意實數 x, y ，恆有 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$

(2) $f(-2)f(2) \geq 16$

則 $f(2) + 4f\left(\frac{1}{3}\right) - 5f\left(\frac{2}{3}\right)$ 之值為 (三)。

【參考解答】Ans: $\frac{20}{9}$

(a) 令 $x = y = 0$ ，由條件(1)知有 $f(0) = 2f(0) + 0$

所以可求得 $f(0) = 0$

(b) 令 $x = 2, y = -2$ ，由條件(1)知有 $f(0) = f(2) + f(-2) - 8$

因為 $f(0) = 0$ ，所以可求得 $f(2) + f(-2) = 8$

$\Rightarrow f(-2) = 8 - f(2)$ ，因為條件(2)為 $f(-2)f(2) \geq 16$

所以 $16 \leq (8 - f(2))f(2) = 8f(2) - (f(2))^2$

$\Rightarrow (f(2))^2 - 8f(2) + 16 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq (f(2) - 4)^2 \leq 0 \Rightarrow (f(2) - 4)^2 = 0$

故求得 $f(2) = 4$

(c) 令 $x = y = 1$ ，由條件(1)知有 $f(2) = f(1) + f(1) + 2$

因為 $f(2) = 4$ ，所以可求得 $f(1) = 1$

(d) 由條件(1)知有

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3}\right) &= 2f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{9}, \quad f(1) = f\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{4}{9} \\ &= f\left(\frac{1}{3}\right) + 2f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = 3f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

因為 $f(1) = 1$ ，所以可求得 $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$

(e) 綜合以上，可求得

$$f(2) + 4f\left(\frac{1}{3}\right) - 5f\left(\frac{2}{3}\right) = 4 + \frac{4}{9} - \frac{20}{9} = \frac{20}{9}$$

四、設 $O(0,0), A(1,2), B(2,1)$ ， P 點是線段 $\overline{AB}$ 的一個動點，滿足條件

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} \geq \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$$

若 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$ ，則 λ 的最小值為 (四)。

【參考解答】Ans: $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

依題意可求得

$$\overrightarrow{OP} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} = (1-\lambda)(1,2) + \lambda(2,1) = (1+\lambda, 2-\lambda)$$

$$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} = (2, 1) - (1 + \lambda, 2 - \lambda) = (1 - \lambda, \lambda - 1)$$

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = (1, 2) - (1 + \lambda, 2 - \lambda) = (-\lambda, \lambda)$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = (1 + \lambda, 2 - \lambda) \cdot (1, -1) = 2\lambda - 1$$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (-\lambda, \lambda) \cdot (1 - \lambda, \lambda - 1) = 2\lambda^2 - 2\lambda$$

$$\text{由條件 } \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} \geq \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \text{ 可推得 } 2\lambda - 1 \geq 2\lambda^2 - 2\lambda \Rightarrow 2\lambda^2 - 4\lambda + 1 \leq 0$$

$$\text{所以 } \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \leq \lambda \leq \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

又 P 點是線段 $\overline{AB}$ 的一個動點，所以 $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\text{綜合以上，可求得 } \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \leq \lambda \leq 1, \text{ 故 } \lambda \text{ 的最小值為 } \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

五、 已知正整數 m, n 滿足 $n = \sqrt{m - 184} + \sqrt{m + 24}$ ，則當 n 有最大值時， m 之值為 (五)。

【參考解答】Ans: 2785

$$\text{令 } a = m - 80 \quad \therefore n = \sqrt{m - 184} + \sqrt{m + 24} = \sqrt{a - 104} + \sqrt{a + 104}$$

$$\text{兩邊平方之：} n^2 = 2a + 2\sqrt{a^2 - 104^2}$$

$$\therefore a^2 - 104^2 \text{ 為平方數}$$

$$\text{令 } a^2 - 104^2 = b^2 \quad \therefore (a + b)(a - b) = 104^2$$

$$\therefore a - b, a + b \text{ 同奇偶} \quad \therefore a + b \text{ 的最大值為 } 52 \times 104$$

$$\therefore n^2 \text{ 的最大值為 } 2(a + b) = 104^2, \text{ 此時 } \begin{cases} a + b = 52 \times 104 = 5408 \\ a - b = 2 \end{cases} \therefore a = 2705$$

$$\therefore m = a + 80 = 2785$$

六、 對任何一個正整數 A ，假設 B 是把所有 A 的數字相加得到的整數， C 是把 B 中所有數字相加得到的整數，而 D 是把 C 中所有數字相加得到的整數。例如說當 $A = 98765$ ，則 $B = 9 + 8 + 7 + 6 + 5 = 35$ ， $C = 3 + 5 = 8$ ， D 也是 8。

如果 $A = 2024^{113} + 113^{2024}$ ，則 D 的值是 (六)。

【參考解答】Ans: 6

我們可以注意到， A, B, C 除以 9 得到的餘數都是一樣的。而 A 除 9 的餘數是 6，所以 B, C 也是。

因為 $2024 < 10000 = 10^4$ ，所以 $2024^{113} < 10^{4 \times 113} = 10^{452}$ ，同理 $113^{2024} < 10^{3 \times 2024} = 10^{6072}$ ，也就是說 A 最多只有 6072 位，因此 $B \leq 6072 \times 9 = 54648$ ，而 $C \leq 5 + 9 + 9 + 9 + 9 = 41$ 。所以 C 只有可能是 6, 15, 24, 33。不管是那一種情形，算出來的 D 都是 6，所以 $D = 6$ 。

【口試題】

已知 f 是定義域和值域都是正整數的函數 f 滿足 $f(f(x))=x$, $f(xy+1)=f(x)f(y)+1$ 。

試證:如果 p 是質數, 則 $f(p)$ 也是質數。

【參考解答】 $f(1)=f(0 \times 1+1)=f(0)f(1)+1$ 。再由 $f(f(x))=x$ 可知 f 是 1-1 的, 所以 $f(0)=0, f(1)=1$ 。
 $f(x+1)=f(1 \times x+1)=f(1)f(x)+1=f(x)+1$ 。由此可知 x 為整數時 $f(x)=x$ 。

(延伸: 是不是對所有 x 也都有 $f(x)=x$? (x 為有理數時可以證明。))。

【口試題】

設 a, b, c 為非負實數, 且滿足 $a+b+c=3$, 試證: $\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} \geq \frac{3}{2}$; 又等號何時成立?

【參考解答】 $(1-b)^2 \geq 0 \Rightarrow 1+b^2 \geq 2b \Rightarrow \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{1}{2b}$

$$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}$$

$$\text{同理 } \frac{b}{1+b^2} \geq b - \frac{bc}{2}, \quad \frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ac}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq a+b+c - \frac{1}{2}(ab+bc+ca)$$

$$= 3 - \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

當 $a=b=c=1$, 等號成立。

113 學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區(高雄區) 筆試(一) 編號: _____

注意事項：

- (1)時間分配：2 小時
- (2)本試卷共四題，滿分 49 分。第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分
- (3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4)不可使用電算器。
- (5)試題、答案卷及計算紙須一同繳回。

一、求所有的整數 x ，使得 $2x^2 + 13x - 45$ 為某個質數的平方？

二、給定一個邊長為 1 的正方形，在正方形的邊上任取三個點（可以是正方形的頂點）。試求出此三點圍成的三角形面積最大為多少，並給出該三角形。

三、令整數 a, b, c, d 滿足 $a^2 - ab + b^2 + c^2 - cd + d^2 = 3$ 。

若 $a + b$ 為 3 的倍數，求序對 (a, b) 的所有解。

四、請用總共 12 張 1×4 或是 4×1 的長型紙片蓋在一個 7×7 的大方格板上，任兩張紙片不可重疊。則可知大方格板上必會剩下一個沒被蓋住的方格，我們稱為『剩餘格』，請問『剩餘格』的所有可能位置為何？

113 學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（高雄） 筆試（一）{參考解答}

一、求所有的整數 x ，使得 $2x^2 + 13x - 45$ 為某個質數的平方？

【參考解答】 $2x^2 + 13x - 45 = (x+9)(2x-5) = p^2$

令 $a = x+9$, $b = 2x-5$

$$2a - b = 23$$

(1) $a = 1$, $b = p^2$; 則 $2 - p^2 = 23$ (不可能)

(2) $a = p$, $b = p$; 則 $2p - p = 23$, $p = 23$, $x = a - 9 = 14$

(3) $a = p^2$, $b = 1$; 則 $2p^2 - 1 = 23$ (不可能)

(4) $a = -1$, $b = -p^2$; 則 $-2 + p^2 = 23$, $p = 5$, $x = a - 9 = -10$

(5) $a = -p$, $b = -p$; 則 $-2p + p = 23$ (不可能)

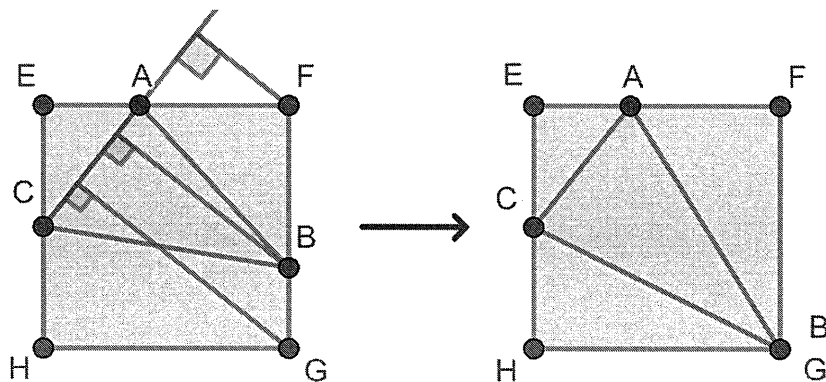
(6) $a = -p^2$, $b = -1$; 則 $-2p^2 + 1 = 23$ (不可能)

所以 $x = 14$ 或 -10

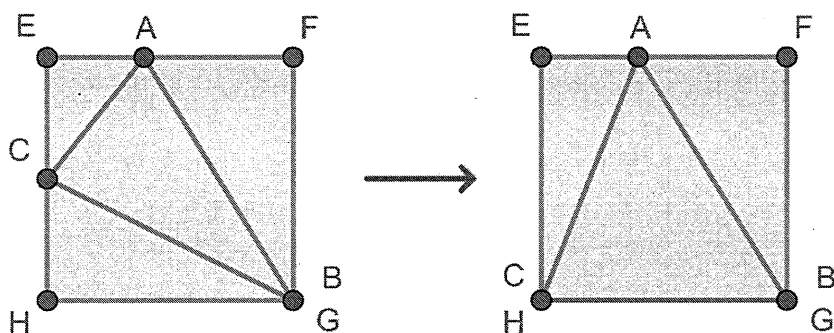
二、給定一個邊長為 1 的正方形，在正方形的邊上任取三個點（可以是正方形的頂點）。試求出此三點圍成的三角形面積最大為多少，並給出該三角形。

【參考解答】：面積最大若且唯若其中兩點為正方形的相鄰頂點，此時面積為 $\frac{1}{2}$ 。

首先假設三點皆不在正方形的頂點上，以下說明把其中一個點移到頂點上必定會得到更大的面積，如下圖所示：（若有其中兩個點在同一個邊上，則更容易看出此事，故下圖考慮三個點都在不同的邊上）



在 $\overline{FG}$ 上的點對 $\overline{CA}$ 做垂足，則最長的情形發生在頂點 G 的位置，故把 B 點移到 G 的位置會得到更大面積的三角形。同理，將 C 點位置移到頂點 H 會得到更大面積的三角形：



最後，A 點若是移到 $\overline{EH}$ 或 $\overline{FG}$ 上，則不會得到更大面積的三角形，因為以 $\overline{BC}$ 為底而言，三角形的高沒有變大；而 A 不管在 $\overline{EF}$ 上的任一個位置，面積均為 $\frac{1}{2}$ 。

這樣的操作不管對任何三角形都適用，因此若想達到最大面積，則三角形的某

兩頂點必為正方形的相鄰頂點，此時的三角形面積為 $\frac{1}{2}$ 。

三、令整數 a, b, c, d 滿足 $a^2 - ab + b^2 + c^2 - cd + d^2 = 3$ 。

若 $a + b$ 為 3 的倍數，求序對 (a, b) 的所有解。

【參考解答】

首先觀察到 $a^2 - ab + b^2 = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$ ，也就是說 $a^2 - ab + b^2$ 為一非

負整數，同理 $c^2 - cd + d^2$ 亦為非負整數，根據題意，此兩非負整數的和為 3。

若 $a + b$ 為 3 的倍數，可推得 $a^2 - ab + b^2 = (a + b)^2 - 3ab$ 亦為 3 的倍數，故 $a^2 - ab + b^2, c^2 - cd + d^2$ 必為 0, 3 或 1, 2 或 2, 1 或 3, 0。另一方面，若 $a + b$ 為 3 的倍數，可推得 $a^2 - ab + b^2 = (a + b)^2 - 3ab$ 亦為 3 的倍數。

設 $a + b = 3k$ ，(i) $a^2 - ab + b^2 = (a + b)^2 - 3ab = 3$ ，即 $9k^2 - 3a(3k - a) = 3$

$$a^2 - 3ak + 3k^2 - 1 = 0, \quad a = \frac{3k \pm \sqrt{-3k^2 + 4}}{2}, \quad -3k^2 + 4 \geq 0, \quad k^2 \leq 4/3$$

所以 $k = -1, 0, 1$ ， $a + b = -3, 0, 3$ ，

可得 $(a, b) = (-1, -2), (-2, -1), (1, -1), (-1, 1), (1, 2), (2, 1)$

(ii) $a^2 - ab + b^2 = (a + b)^2 - 3ab = 0$ ，即 $9k^2 - 3a(3k - a) = 0$

$$a^2 - 3ak + 9k^2 = 0, \quad a = \frac{3k \pm \sqrt{-3k^2}}{2}, \quad \text{所以 } k = 0, \quad a + b = 0,$$

可得 $(a, b) = (0, 0)$

四、請用總共 12 張 1×4 或是 4×1 的長型紙片蓋在一個 7×7 的大方格板上，任兩張紙片不可重疊。則可知大方格板上必會剩下一個沒被蓋住的方格，我們稱為『剩餘格』，請問『剩餘格』的所有可能位置為何？

【參考解答】：

將大方格板用四種顏色 (A, B, C, D) 依序塗上，則可知每張紙片恰蓋住四種不同顏色，但是

A	C	B	D	A	C	B
B	D	C	A	B	D	C
C	A	D	B	C	A	D
D	B	A	C	D	B	A
A	C	B	D	A	C	B
B	D	C	A	B	D	C
C	A	D	B	C	A	D

C	B	A	D	C	B	A
D	C	B	A	D	C	B
A	D	C	B	A	D	C
B	A	D	C	B	A	D
C	B	A	D	C	B	A
D	C	B	A	D	C	B
A	D	C	B	A	D	C

統計結果可知，在兩種塗法裡，塗 C 顏色的方格都是 13 格，而塗上 A, B, D 顏色的方格則各都是 12 格。因此『剩餘格』只可能是塗上 C 顏色的方格。而在兩種著色法裡同時為 C 顏色的方格，只有在正中間的那個，因此，『剩餘格』只可能在正中間。下圖是一種紙片的蓋法。

1	1	1	1	10	11	12
2	2	2	2	10	11	12
3	3	3	3	10	11	12
4	5	6		10	11	12
4	5	6	7	7	7	7
4	5	6	8	8	8	8
4	5	6	9	9	9	9

113 學年度高級中學數學科能力競賽複賽答案卷及試題

南區（高雄區） 筆試（二） 編號：_____

注意事項：

- (1)時間分配：1 小時
- (2)本試卷共 7 題，每題 3 分滿分 21 分。
- (3)不可使用電算器。
- (4)將答案填入答案欄內。
- (5)答案卷、試題及計算紙須一同繳回。

1. 籃球 6 個、排球 14 個排成一行，要求籃球與籃球之間至少有 2 個排球的排法共有多少種？ 210

2. 設 a 為正有理數且滿足 $|7a - 2| \leq 1$ 及 $\frac{a-1}{a^4}$ 為整數，

求 a 的所有可能值為

$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$

3. 在平面上有向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 滿足 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$,

且 $\vec{a} - \vec{c}$ 和 $\vec{b} - \vec{c}$ 的夾角為 120° ，則 $|\vec{c}|$ 的最大值為 $2\sqrt{3}/3$

4. 設 (a, b) 為最大的負整數配對使得 $(1 + i)^a = (\sqrt{3} - i)^b$,

$(i = \sqrt{-1})$ 則 $a - 3b = ?$

3

5. 正整數 a 使得 $a^2 - 13a + 43$ 為完全平方數，求所有可能的正整數 a ，它們的和為多少？

13

6. 令 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 30^\circ$ 且三邊長分別為 $\overline{AB} = c$,

$\overline{BC} = a, \overline{AC} = b$ ，且 $b > c$ ，求 $\frac{b^2 - c^2}{a^2}$ 的最大值為

2

7. 設有 2024 個不等於 104 的正整數，將其標示為

$a_1, a_2, \dots, a_{2024}$ ，若 $a_1, a_2, \dots, a_{2024}$ 其中任意連續的

一些數的和均不等於 104，求 $\sum_{i=1}^{2024} a_i$ 的最小值為

4000

113 學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題

第 5 區(屏東高中) 筆試(一) 編號：_____

注意事項：

- (1) 時間分配：2 小時。
- (2) 本試卷共 4 題，滿分 49 分。第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分。
- (3) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4) 不可使用電算器。
- (5) 試題與答案一同繳回。

一、設 $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$ ，試求 $f\left(\frac{1}{2025}\right) + f\left(\frac{2}{2025}\right) + f\left(\frac{3}{2025}\right) + \cdots + f\left(\frac{2024}{2025}\right)$ 之值。

二、給定 F_1, F_2 分別是橢圓 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的左、右焦點，直線 L 不經過焦點 F_1 與橢圓交於兩個相異點 A, B 。如果直線 AF_1 、 L 、 BF_1 的斜率依次成等差數列，試求直線 L 斜率的範圍。

三、設實數數列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 與 $b_1, b_2, b_3, \dots$ 滿足 $a_1 > 0$ 與 $b_1 > 0$ ，

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{b_n} \\ b_{n+1} = b_n + \frac{1}{a_n} \end{cases}, \text{ 其中 } n \text{ 為正整數。}$$

證明 $a_2 + b_2 \geq 4$ 及 $a_m + b_m > \sqrt{8m}$ ，其中 m 為大於或等於 3 的正整數。

四、當 m 與 n 是正實數，且滿足 $m + n = mn$ 時，就稱點 $\left(m, \frac{m}{n}\right)$ 為“完美點”。

已知點 $A(0, 5)$ 與點 M 都在直線 $y = -x + b$ 上，點 B 與點 C 是“完美點”，且點 B 在線段 AM 上。若 $\overline{MC} = \sqrt{3}$ ， $\overline{AM} = 4\sqrt{2}$ ，試求 $\triangle MBC$ 的面積。

113 學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題

第 5 區(屏東高中) 筆試(一) 編號：_____

注意事項：

本試卷共4題，滿分49分。第一題12分，第二題12分，第三題12分，第四題13分。

一、設 $f(x) = \frac{4^x}{4^x+2}$ ，試求 $f\left(\frac{1}{2025}\right) + f\left(\frac{2}{2025}\right) + f\left(\frac{3}{2025}\right) + \cdots + f\left(\frac{2024}{2025}\right)$ 之值。

[參考解答] 1012

因為 $f(1-x) = \frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2} = \frac{4}{4+2 \cdot 4^x} = \frac{2}{4^x+2}$ ，可得 $f(x) + f(1-x) = 1$ 。

因此根據

$$\begin{aligned} & 2 \left[f\left(\frac{1}{2025}\right) + f\left(\frac{2}{2025}\right) + \cdots + f\left(\frac{2024}{2025}\right) \right] \\ &= \left(f\left(\frac{1}{2025}\right) + f\left(\frac{2024}{2025}\right) \right) + \left(f\left(\frac{2}{2025}\right) + f\left(\frac{2023}{2025}\right) \right) + \cdots + \left(f\left(\frac{2024}{2025}\right) + f\left(\frac{1}{2025}\right) \right) \\ &= 2024 \end{aligned}$$

可得到 $f\left(\frac{1}{2025}\right) + f\left(\frac{2}{2025}\right) + \cdots + f\left(\frac{2024}{2025}\right) = 1012$ 。

113 學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題

第 5 區(屏東高中) 筆試(一) 編號: _____

注意事項：

本試卷共4題，滿分49分。第一題12分，第二題12分，第三題12分，第四題13分。

二、給定 F_1, F_2 分別是橢圓 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的左、右焦點，直線 L 不經過焦點 F_1 與橢圓交於兩個相異點 A, B 。如果直線 AF_1 、 L 、 BF_1 的斜率依次成等差數列，試求直線 L 斜率的範圍。

[參考解答] $m > 1/\sqrt{3}$ 或 $m < -1/\sqrt{3}$

假設 $F_1(-c, 0)$, $c^2 = a^2 - b^2 = 3 - 2$, 所以, $F_1(-1, 0)$ 。

假設 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), L: y = mx + k$, 其中 m 是直線 L 的斜率。

因為 A, B 在直線 L 與橢圓上, 所以 x_1, x_2 滿足方程式: $\frac{x^2}{3} + \frac{(mx+k)^2}{2} = 1$

$$(2 + 3m^2)x^2 + (6mk)x + (3k^2 - 6) = 0 \dots\dots\dots (1)$$

x_1, x_2 相異, 所以, 判別式: $D = (6mk)^2 - 4(2 + 3m^2)(3k^2 - 6) > 0$

$$9m^2k^2 - (9m^2k^2 - 18m^2 + 6k^2 - 12) = 18m^2 - 6k^2 + 12 > 0$$

$$3m^2 + 2 > k^2 \dots\dots\dots (2)$$

因為直線 AF_1 、 L 、 BF_1 的斜率依次成等差數列, $F_1(-1, 0)$, 所以 $2m = \frac{y_1}{x_1+1} + \frac{y_2}{x_2+1}$

因為 A, B 在直線 L 上, 所以 $2m = \frac{mx_1+k}{x_1+1} + \frac{mx_2+k}{x_2+1}$

$$2mx_1x_2 + 2mx_1 + 2mx_2 + 2m = 2mx_1x_2 + k(x_1 + x_2 + 2) + mx_1 + mx_2$$

$$(m - k)(x_1 + x_2 + 2) = 0$$

因為直線 L 不經過焦點 F_1 , 所以 $m - k \neq 0$,

$$x_1 + x_2 + 2 = 0 \dots\dots\dots (3)$$

使用根與係數關係和推論(1)得知 $\frac{6mk}{2+3m^2} = 2$

$$k = \frac{2 + 3m^2}{3m} \dots\dots\dots (4)$$

$$(4) \text{代入}(2) \text{得知} 3m^2 + 2 > \left(\frac{2+3m^2}{3m}\right)^2$$

$$27m^4 + 18m^2 > 9m^4 + 12m^2 + 4$$

$$9m^4 + 3m^2 - 2 = (3m^2 - 1)(3m^2 + 2) > 0$$

所以, $3m^2 - 1 > 0$ 。即, $m > 1/\sqrt{3}$ 或 $m < -1/\sqrt{3}$ 。

113 學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題

第 5 區(屏東高中) 筆試(一) 編號：_____

注意事項：

本試卷共4題，滿分49分。第一題12分，第二題12分，第三題12分，第四題13分。

三、設實數數列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 與 $b_1, b_2, b_3, \dots$ 滿足 $a_1 > 0$ 與 $b_1 > 0$ ，

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{b_n} \\ b_{n+1} = b_n + \frac{1}{a_n} \end{cases}, \text{其中 } n \text{ 為正整數。}$$

證明 $a_2 + b_2 \geq 4$ 及 $a_m + b_m > \sqrt{8m}$ ，其中 m 為大於或等於3的正整數。

[參考解答]

由 $a_1 > 0$ 與 $b_1 > 0$ ，可知 $a_2 + b_2 = a_1 + \frac{1}{b_1} + b_1 + \frac{1}{a_1} \geq 2 + 2 = 4$ 。

若 $m \geq 3$ ， $a_m^2 + b_m^2 = a_{m-1}^2 + b_{m-1}^2 + \frac{1}{a_{m-1}^2} + \frac{1}{b_{m-1}^2} + 2\left(\frac{a_{m-1}}{b_{m-1}} + \frac{b_{m-1}}{a_{m-1}}\right)$ 。可知

$$\begin{aligned} a_m^2 + b_m^2 &= a_1^2 + b_1^2 + \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{1}{a_{k-1}^2} + \frac{1}{b_{k-1}^2} \right) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{a_{k-1}}{b_{k-1}} + \frac{b_{k-1}}{a_{k-1}} \right) \\ &> a_1^2 + b_1^2 + \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{b_1^2} + 2 \cdot 2(m-1) \geq 2 + 2 + 2 \cdot 2(m-1) = 4m \end{aligned}$$

此外， $a_m b_m = a_{m-1} b_{m-1} + \frac{1}{a_{m-1} b_{m-1}} + 2$ 。可知

$$a_m b_m = a_1 b_1 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{a_k b_k} + 2(m-1) > a_1 b_1 + \frac{1}{a_1 b_1} + 2m - 2 \geq 2 + 2m - 2 = 2m$$

可得 $(a_m + b_m)^2 = a_m^2 + b_m^2 + a_m b_m > 4m + 2 \cdot 2m = 8m$ ，即 $a_m + b_m > \sqrt{8m}$ 。

113 學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題

第 5 區(屏東高中) 筆試(一) 編號: _____

注意事項：

本試卷共4題，滿分49分。第一題12分，第二題12分，第三題12分，第四題13分。

四、當 m 與 n 是正實數，且滿足 $m+n=mn$ 時，就稱點 $(m, \frac{m}{n})$ 為“完美點”。

已知點 $A(0,5)$ 與點 M 都在直線 $y=-x+b$ 上，點 B 與點 C 是“完美點”，且點 B 在線段 AM 上。若 $\overline{MC}=\sqrt{3}$ ， $\overline{AM}=4\sqrt{2}$ ，試求 $\triangle MBC$ 的面積。

[參考解答] $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(1) 首先，因為 $m+n=mn$ ，且 m 、 n 是正實數，所以 $\frac{m}{n}+1=m$ ，即 $\frac{m}{n}=m-1$ ，故

$P(m, m-1)$ ，即“完美點” P 落在直線 $y=x-1$ 上。

因為點 $A(0,5)$ 在直線 $y=-x+b$ ，所以 $b=5$ ，即直線 $AM: y=-x+5$ 。

因為“完美點” B 在直線 AM 上，由

$$\begin{cases} y=x-1 \\ y=-x+5 \end{cases} \Rightarrow B(3,2)$$

又因直線 $y=x-1$ 與直線 AM 垂直，點 B 是此二直線的交點，所以垂足是點 B 。

(2) 因為點 C 是“完美點”，且在直線 $y=x-1$ 上，所以 $\triangle MBC$ 是直角三角形。

$$\because B(3,2)、A(0,5) \quad \therefore AB=3\sqrt{2}$$

$$\because AM=4\sqrt{2} \quad \therefore BM=AM-AB=\sqrt{2}$$

$$\because CM=\sqrt{3} \quad \therefore BC=\sqrt{CM^2-BM^2}=1$$

所以 $\triangle MBC$ 的面積 $S_{\triangle MBC}=\frac{1}{2} \times BC \times BM=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

113 學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題

第 5 區(屏東高中) 筆試(二) 編號：_____

注意事項：

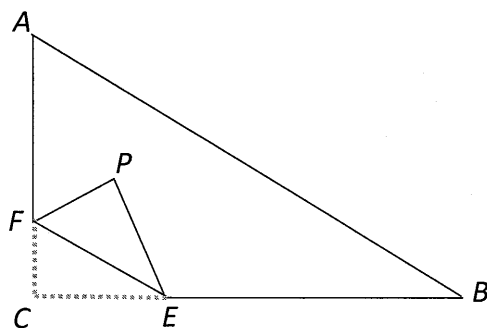
- (1) 時間分配：1 小時。
- (2) 本試卷共 4 題，滿分 21 分。第一題 5 分，第二題 5 分，第三題 5 分，第四題 6 分。
- (3) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4) 不可使用電算器。
- (5) 試題與答案一同繳回。

一、由數字 0、1、2、3 組成 n 位數，在此 n 位數中，0、1、2、3 都至少出現一次。試問這樣的 n 位數有多少個？

二、給定 $f(x) = \sqrt{80-x} + \sqrt{x} + \sqrt{26-x}$ ，試求 $f(x)$ 的最大值，並求這時候的 x 值。

三、試求 $\sqrt{2024 + 2020 \sqrt{2025 + 2021 \sqrt{2026 + 2022 \sqrt{2027 + 2023 \sqrt{\dots}}}}}$ 之值。

四、如下圖，在直角三角形 ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AC} = 6$ ， $\overline{BC} = 8$ ，點 F 在邊 AC 上，並且 $\overline{CF} = 2$ ，點 E 為在邊 BC 上的動點，將三角形 CEF 沿直線 EF 折疊，點 C 落在點 P 處，試求點 P 到邊 AB 的距離之最小值。



113 學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題

第 5 區(屏東高中) 筆試(二) 編號: _____

注意事項：

本試卷共4題，滿分21分。第一題5分，第二題5分，第三題5分，第四題6分。

- 一、由數字 0、1、2、3 組成 n 位數，在此 n 位數中，0、1、2、3 都至少出現一次。試問這樣的 n 位數有多少個？

[參考解答] $3 \times 4^{n-1} - 3 \times 3^n + 9 \times 2^{n-1} - 3$

在不要求數字 0、1、2、3 中的每一個至少出現一次時，那總共會有 $3 \times 4^{n-1}$ 個 n 位數 (數字 0 不能出現在第 n 位)。

接著我們考慮僅由 0、1、2、3 中的三個數字組成的數: 由 0、1、2 或 0、1、3 或 0、2、3 組成的數共有 $3 \times 2 \times 3^{n-1}$ 個，由 1、2、3 組成的數有 3^n 個。因此總共有 3×3^n 個。

僅由 0、1、2、3 中的兩個數字組成的數: 由 0、1 或 0、2 或 0、3 組成的數共有 $3 \times 1 \times 2^{n-1}$ 個，由 1、2 或 1、3 或 2、3 組成的數有 3×2^n 個。因此總共有 $9 \times 2^{n-1}$ 個。

僅由 0、1、2、3 中的一個數字組成的數共有 3 個。

因此，總共有 $3 \times 4^{n-1} - 3 \times 3^n + 9 \times 2^{n-1} - 3$ 個滿足本題條件的 n 位數。

113 學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題

第 5 區(屏東高中) 筆試(二) 編號：_____

注意事項：

本試卷共4題，滿分21分。第一題5分，第二題5分，第三題5分，第四題6分。

二、給定 $f(x) = \sqrt{80-x} + \sqrt{x} + \sqrt{26-x}$ ，試求 $f(x)$ 的最大值，並求這時候的 x 值。

[參考解答] $11\sqrt{2}$ ，此時 $x = 8$

使用柯西不等式

$$(\sqrt{80-x} + \sqrt{x} + \sqrt{26-x})^2 \leq$$

$$\left[1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right] \cdot [(\sqrt{80-x})^2 + (\sqrt{3} \cdot \sqrt{x})^2 + (\sqrt{2} \cdot \sqrt{26-x})^2]$$

$$= \left(\frac{6+2+3}{6}\right) \cdot (80+52) = 11 \cdot 22$$

$$\text{等號成立, } \frac{\sqrt{80-x}}{1} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{26-x}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\text{所以, } 80-x = 9x = 104-4x$$

$$\text{可得, } x = 8, \text{ 最大值為 } f(8) = 11\sqrt{2} \text{。}$$

113 學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題

第 5 區(屏東高中) 筆試(二) 編號：_____

注意事項：

本試卷共4題，滿分21分。第一題5分，第二題5分，第三題5分，第四題6分。

三、試求 $\sqrt{2024 + 2020 \sqrt{2025 + 2021 \sqrt{2026 + 2022 \sqrt{2027 + 2023 \sqrt{\dots}}}}}$ 之值。

[參考解答] 2022

$$\text{設 } f(x) = \sqrt{x + (x-4) \sqrt{(x+1) + (x-3) \sqrt{(x+2) + (x-2) \sqrt{(x+3) + (x-1) \sqrt{\dots}}}}}$$

$$\begin{aligned} \text{可知 } f(x)^2 &= x + (x-4) \sqrt{(x+1) + (x-3) \sqrt{(x+2) + (x-2) \sqrt{(x+3) + (x-1) \sqrt{\dots}}}} \\ &= x + (x-4)f(x+1) \end{aligned}$$

因 $(x-2)^2 = x + (x-4)(x-1)$ ，可知 $f(x) = x-2$ 為一個解。

由於 $f(2024)$ 是唯一解，可知 $f(2024) = 2024 - 2 = 2022$ 。

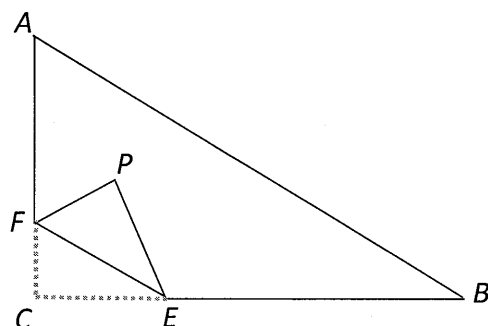
113 學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題

第 5 區(屏東高中) 筆試(二) 編號：_____

注意事項：

本試卷共4題，滿分21分。第一題5分，第二題5分，第三題5分，第四題6分。

- 四、如下圖，在直角三角形 ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AC} = 6$ ， $\overline{BC} = 8$ ，點 F 在邊 AC 上，並且 $\overline{CF} = 2$ ，點 E 為在邊 BC 上的動點，將三角形 CEF 沿直線 EF 折疊，點 C 落在點 P 處，試求點 P 到邊 AB 的距離之最小值。



[參考解答] $\frac{6}{5}$

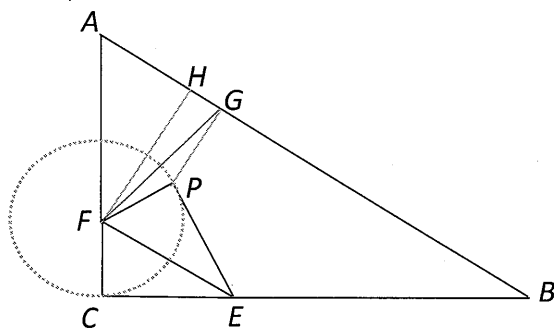
根據題意可知，點 P 的軌跡是以 F 為圓心，以 FC 為半徑的圓。當 F 、 P 、 G 三點共線時， PG (即點 P 到邊 AB 的距離)為最小。

如下圖，作 $PG \perp AB$ 於點 G ， $FH \perp AB$ 於點 H 。

在 $\text{Rt} \triangle AFH$ 中，

$$FH = AF \cdot \sin \angle A = 4 \times \frac{BC}{AB} = 4 \times \frac{BC}{\sqrt{AC^2 + BC^2}} = 4 \times \frac{8}{10} = \frac{16}{5}$$

故點 P 到邊 AB 的距離的最小值為 $\frac{16}{5} - 2 = \frac{6}{5}$



113 學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題

第 5 區(屏東高中)

口試(一)

設 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，其中 a, b, c 為實數，且 $a \neq 0$ 。若 $|f(0)| \leq 1$ ，

$|f(1)| \leq 1$ ， $|f(-1)| \leq 1$ ，試證明

(1) 若 x 滿足 $-1 \leq x \leq 1$ ，則 $|f(x)| \leq \frac{5}{4}$ 。

(2) 若 $|f(x)| = \frac{5}{4}$ ，則 $|x| = \frac{1}{2}$ 。

[參考解答]

由 $f(1) = a + b + c$ 、 $f(0) = c$ 、 $f(-1) = a - b + c$ ，

可知 $a = \frac{f(1)+f(-1)-2f(0)}{2}$ 、 $b = \frac{f(1)-f(-1)}{2}$ 、 $c = f(0)$ 。

所以 $f(x) = \frac{f(1)+f(-1)-2f(0)}{2}x^2 + \frac{f(1)-f(-1)}{2}x + f(0)$ ，

即 $f(x) = f(1)\frac{x^2+x}{2} + f(-1)\frac{x^2-x}{2} + f(0)(1-x^2)$ 。

若 $0 \leq x \leq 1$ ，則 $|f(x)| \leq |f(1)|\left|\frac{x^2+x}{2}\right| + |f(-1)|\left|\frac{x^2-x}{2}\right| + |f(0)||1-x^2| \leq \left|\frac{x^2+x}{2}\right| + \left|\frac{x^2-x}{2}\right| +$

$|1-x^2| = \frac{x^2+x}{2} - \frac{x^2-x}{2} + 1 - x^2 = -x^2 + x + 1 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \leq \frac{5}{4}$ 。

若 $-1 \leq x \leq 0$ ，則 $|f(x)| \leq |f(1)|\left|\frac{x^2+x}{2}\right| + |f(-1)|\left|\frac{x^2-x}{2}\right| + |f(0)||1-x^2| \leq \left|\frac{x^2+x}{2}\right| + \left|\frac{x^2-x}{2}\right| +$

$|1-x^2| = -\frac{x^2+x}{2} + \frac{x^2-x}{2} + 1 - x^2 = -x^2 - x + 1 = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \leq \frac{5}{4}$ 。

可知若 $|f(x)| = \frac{5}{4}$ ，則 $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = -\frac{1}{2}$ ，即 $|x| = \frac{1}{2}$ 。

113 學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題

第 5 區(屏東高中)

口試(二)

已知 x 與 y 為正實數，且 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ 。試證明對任意正整數 n ，都有下列性質：

$$(x+y)^n - x^n - y^n \geq 2^{2n} - 2^{n+1}。$$

[參考解答]

因為 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ ，所以 $x+y=xy$ ， $(x-1)(y-1)=1$ 。

且因 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$ ，所以 $xy \geq 4$ ，

$$\begin{aligned} & (x+y)^n - x^n - y^n + 1 \\ &= (xy)^n - x^n - y^n + 1 = (x^n - 1)(y^n - 1) \\ &= (x-1)(y-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)(y^{n-1} + y^{n-2} + \cdots + y + 1) \\ &= (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)(y^{n-1} + y^{n-2} + \cdots + y + 1) \\ &\geq \left[(xy)^{\frac{n-1}{2}} + (xy)^{\frac{n-2}{2}} + \cdots + (xy)^{\frac{1}{2}} + 1 \right]^2 \\ &\geq \left[4^{\frac{n-1}{2}} + 4^{\frac{n-2}{2}} + \cdots + 4^{\frac{1}{2}} + 1 \right]^2 \\ &= [2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1]^2 = (2^n - 1)^2 \end{aligned}$$

可得到 $(x+y)^n - x^n - y^n \geq 2^{2n} - 2^{n+1}$ 。