114
嘉科實中

2015.9.28(一) ~9.30(一)
10.7(二)~10.10(五) Ru

一、填充題（每題 7 分，共 56 分）

1. 若$\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}=\frac{1}{7}$，$a$、$b$、$c$ 為質數，則$a^2+b^2+c^2=$______。

參考答案：83

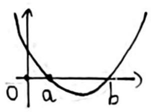
$\boxed{1}$ $7(a+b+c)=abc$
取 $a=7 \Rightarrow (b-1)(c-1)=8$

$b-1$	$c-1$	b	c
2	4	3	5

$9+25+49=83$

2. 設拋物線$\Gamma: y=x^2-kx+k$ 與 x 軸交於$(a,0)$與$(b,0)$兩點，其中 $0<a<b$。Γ 在第一象限與 x 軸、y 軸所圍區域的面積為R_1，Γ 在第四象限與 x 軸所圍區域的面積為R_2。若$R_1=R_2$，且 k,a,b 為實數，求（k,a,b）＝

$\boxed{2}$ 令 $F(x)=\frac{1}{6}(2x^3-3kx^2+6kx)$



$F(a)=F(a)-F(b)$
$\Rightarrow F(b)=0$
$\Rightarrow 2b^2-3kb+6k=0$
又 $2b^2-2kb+2k=0$

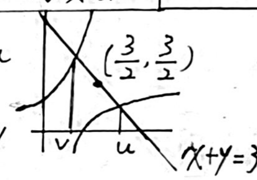
$\Rightarrow -kb+4k=0 \Rightarrow b=4$
$k=ab=a+b \Rightarrow a=\frac{4}{3} \Rightarrow k=\frac{16}{3}$

參考答案：$(\frac{16}{3},\frac{4}{3},4)$

3. 已知$\begin{cases}\tan\alpha+\log_3(3\tan\alpha+6)=2\\ \tan\beta+3^{\tan\beta-1}=4\end{cases}$，求 $\tan\alpha+\tan\beta=$______。

$\boxed{3}$ 令 $u=\tan\alpha+2$
$v=\tan\beta-1$

$\log u=3-u$
$3^v=3-v$



$\frac{u+v}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow \tan\alpha+\tan\beta=2$

參考答案：2

4. 有一質點在實數線上跑來跑去，它由 O(0)跑至$A_1(1)$，稱為第一次，再由$A_1(1)$回頭跑至$A_2\left(\frac{1}{3}\right)$，稱為第二次，再由$A_2\left(\frac{1}{3}\right)$回頭跑至$A_3\left(\frac{7}{9}\right)$，稱為第三次，再由$A_3\left(\frac{7}{9}\right)$回頭跑至$A_4\left(\frac{13}{27}\right)$，稱為第四次，...，依此類推持續跑來跑去，若第 101 次後，它會停在距原點$\frac{[q^r+(q-1)^r]}{p\times q^{r-1}}$處，其中 p、q、r 為相異正整數，則有序數對$(p,q,r)=$______。

$\boxed{4}$ $a_1=\left(\frac{-2}{3}\right)^0$, $a_2=\left(\frac{-2}{3}\right)^0+\left(\frac{-2}{3}\right)^1$
$a_3=\left(\frac{-2}{3}\right)^0+\left(\frac{-2}{3}\right)^1+\left(\frac{-2}{3}\right)^2$, $a_4=\left(\frac{-2}{3}\right)^0+\left(\frac{-2}{3}\right)^1+\left(\frac{-2}{3}\right)^2+\left(\frac{-2}{3}\right)^3$
$a_{101}=\frac{1\cdot\left(1-\left(\frac{-2}{3}\right)^{101}\right)}{1-\frac{-2}{3}}=\frac{3}{5}\left(\left(\frac{3}{3}\right)^{101}+\left(\frac{3-2}{3}\right)^{101}\right) \Rightarrow (5,3,101)$

參考答案：(5,3,101)

$\boxed{5}$ $|z-i|+|z-(2-i)|=2a \quad a=2,\ c=\sqrt{2} \quad \Gamma: \frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

$\Rightarrow F_1(0,1),\ F_2(2,-1) \Rightarrow$ 中心 $(1,0)$ $b^2=2$ 令 $P(2c+1, \sqrt{2}s)$ $A(1,0)$

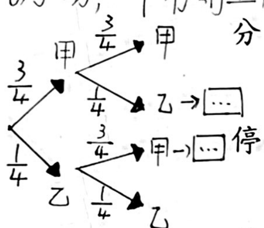
5. 若複數 z 滿足 $\left|\frac{z^2+1}{z+i}\right|+\left|\frac{z^2+4i-3}{z-i+2}\right|=4$，則 $|z-1|$ 的最小值

為______。 $\overline{PA}^2 = 4c^2+2s^2 = 2+2c^2 \geq 2 \Rightarrow \sqrt{2}$

$\boxed{6}$ 參考答案：$\sqrt{2}$

令E=不考慮8局0分,stop的期望值

6. 可星和予熹兩人進行某項比賽，約定每局必分出勝負，勝者得 1 分，負者得 0 分，比賽進行到有一人比對方多 2 分或打滿 8 局時停止。設可星在每局中獲勝的機率為 $\frac{3}{4}$，且各局勝負為獨立事件，求比賽停止時，比賽局數的期望值為 E(9局以後stop) E(8局0分)



$E=\frac{9+1}{16}\times 2+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}(2+E)\cdot 2$

$\Rightarrow E=2+\frac{3}{8}E$

$\Rightarrow E=\frac{16}{5}$

參考答案：$\frac{803}{256}$

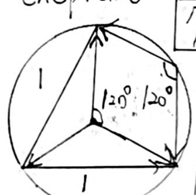
所求 $=E-2^4(\frac{3}{4})^4(\frac{1}{4})^4(8+E)+2^4(\frac{3}{4})^4(\frac{1}{4})^4\cdot 8$

$=\frac{16}{5}-2^4(\frac{3}{4})^4(\frac{1}{4})^4\cdot\frac{16}{5}=\frac{1}{5}(2^{12}-81)\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{803}{256}$

代數沒試出來

thepiano $\boxed{7}$

7. 平面向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 滿足 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ 且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$，若 $\vec{a}-\vec{c}$ 與 $\vec{c}-\vec{b}$ 的夾角為 $\frac{\pi}{3}$，求 $|\vec{c}|$ 的最大值與最小值的總和為



$r+2r$

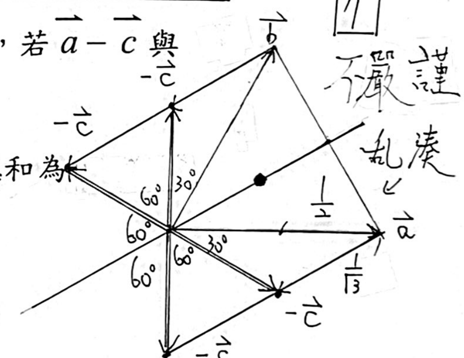
$=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 3=\sqrt{3}$

$\vec{a}-\vec{c},\ \vec{b}-\vec{c}$ 夾角 $120°$

$\frac{1}{\sqrt{3}}(1+2)=\sqrt{3}$

參考答案：$\sqrt{3}$

$\boxed{7}$ 不嚴謹 亂湊



8. 已知集合 $S=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{7},\frac{1}{9},\frac{1}{13},\frac{1}{17},\frac{1}{25}\right\}$ 共有 127 個非空子集合，設這些子集合內的元素乘積分別為 $p_1,p_2,p_3,\cdots,p_{127}$，求 $p_1+p_2+p_3+\cdots+p_{127}=$______。

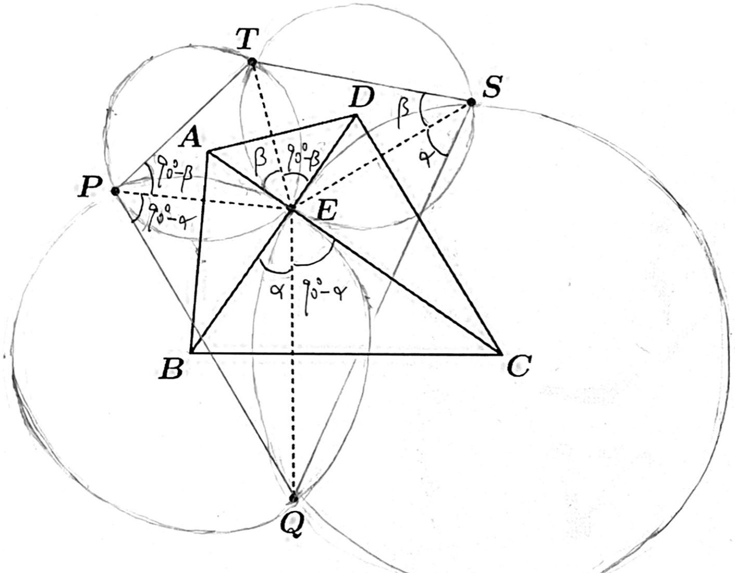
參考答案：$\frac{171}{85}$

$\boxed{8}$ $(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{7})\cdots(1+\frac{1}{25})-1$

$=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{18}{17}\cdot\frac{26}{25}-1=\frac{171}{85}$

二、計算證明題（每題 10 分，共 20 分） 114 嘉科實中

1. 如圖所示，$ABCD$ 是一個凸四邊形，若兩對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 彼此垂直且交於 E 點，設 P,Q,S,T 分別為點 E 對於 $ABCD$ 四個邊的對稱點。證明：P,Q,S,T 四點共圓。**(10 分)**



令以 C 為圓心，$\overline{CS}$ 為半徑的圓

C_C : $\angle BEQ = \angle ESQ \overset{令}{=} \alpha$

C_D : $\angle TEA = \angle TSE \overset{令}{=} \beta$

C_A : $\angle TED = \angle TPE = 90^\circ - \beta$

C_B : $\angle CEQ = \angle QPE = 90^\circ - \alpha$

$\Rightarrow \angle TSQ + \angle TPQ = 180^\circ$

$\boxed{二}$

2. x、y 為實數，且 $x^2+xy+y^2=6$，試求 $x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$ 的最大值及最小值為分別為多少？（**10 分**）

$(x+y)^2 = 6+xy \geq 0$

參考答案：最大值：3、最小值：$-8-6\sqrt{2}$

$(x-y)^2 = 6-3xy \geq 0$

$(6+xy = (x+y)^2 \geq 4xy)$

$\Rightarrow -6 \leq xy \leq 2$

$\Rightarrow 0 \leq (x+y)^2 \leq 8 \Rightarrow -2\sqrt{2} \leq x+y \leq 2\sqrt{2}$

$xy(x+y) - xy + (x+y) - 6$

令 $t = x+y$

$f(t) = t(t^2-6) - t^2 + t$

$= t^3 - t^2 - 5t$

$f'(t) = 3t^2 - 2t - 5$, $\begin{matrix} 3 & -5 \\ 1 & +1 \end{matrix}$

$f(-1) = 3$, $f(\frac{5}{3}) = \frac{-175}{27}$

$f(-2\sqrt{2}) = -8-6\sqrt{2}$, $f(2\sqrt{2}) = -8+6\sqrt{2}$