陸、筆試試題及參考解答

111 學年度普通型高級中學數學科能力競賽(決賽)

筆試（一）試題卷

編號：_______________（學生自填）

注意事項：

(1) 時間：2 小時(13:30～15:30)
(2) 配分：每題皆為 7 分
(3) 不可使用計算器
(4) 請將答案依序寫在答案卷內
(5) 學生自評預估得分(每題 0 ~7 分)

一、設a,b,c是正實數，且滿足條件$ab+bc+ca+2abc=1$，試證：

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{2abc}\geq 16,$$

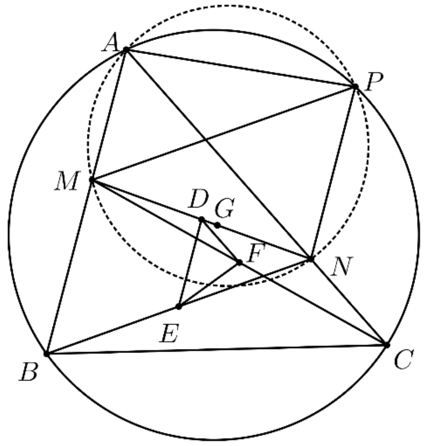
並求等號成立時，a,b,c之值分別是多少？

二、已知有五個不同的四位數，它們的千位數字相同且它們的和恰能被其中的四個數整除，求所有滿足此條件的五個數。

三、如圖，設銳角三角形ABC中，$\overline{AC}>\overline{AB}$，點$M,N$分別在邊$AB,AC$上滿足$\overline{AM}<\overline{AN}$，$\triangle ABC$與$\triangle AMN$的外接圓交於相異兩點$A,P$。設$D,E,F$分別為$\overline{MN},\overline{BN},\overline{CM}$的中點，$\triangle DEF$的外接圓與$\overline{MN}$再交於$D$與$N$之間的一點$G$。證明：

(1) $\triangle DEF\sim\triangle PMN$；

(2) $\frac{\overline{ED}}{\overline{EG}}=\frac{\overline{MP}}{\overline{NA}}$。



111 學年度普通型高級中學數學科能力競賽(決賽)

筆試（二）試題卷

編號：________________（學生自填）

注意事項：

(1) 時間：2 小時(16:00～18:00)
(2) 配分：每題皆為 7 分
(3) 不可使用計算器
(4) 請將答案依序寫在答案卷內
(5) 學生自評預估得分(每題 0 ~7 分)

一、設a, b, c為正整數，且$c(ac+1)^2=(5c+2b)(2c+b)$，試證：c必為奇數且c為完全平方數。

二、$S=\{2350,\ 2351,\ \cdots,\ 2350+k\}$，求所有的正整數$k$，使得集合$S$能分成元素和相等且交集為空集合的兩個子集合$S_1$與$S_2$。

三、設$x\geq 3$且三角形的三邊長為$\log x$，$\log(x+1)$和$\log(x^2+1)$。證明此三角形為鈍角三角形且其鈍內角度數大於120°。

筆試參考解答

題目：

設a,b,c是正實數，且滿足條件$ab+bc+ca+2abc=1$，試證：

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{2abc}\geq 16,$$

並求等號成立時，a,b,c之值分別是多少？

解析					
	類　型	■ 代數(A)　□ 數論(N)　□ 幾何(G)　□ 組合(C)			
	試題出處	■ 自編　□ 改編於：			
	難 易 度	□ 難　■ 中等　□ 易	編 號	筆試一(1)	

解答： 因為

$$1=ab+bc+ca+2abc \Leftrightarrow 3=ab+bc+ca+2abc+2$$

$$\Leftrightarrow 3+ab+bc+ca+2(a+b+c)=2abc+2(ab+bc+ca)+2(a+b+c)+2$$

$$\Leftrightarrow (b+1)(c+1)+(c+1)(a+1)+(a+1)(b+1)=2(a+1)(b+1)(c+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2$$

如果x,y皆為正實數，

則由算幾不等式，得$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$，且當$x=y$時等號成立。

$$\Rightarrow \frac{1}{3}+\frac{1}{4a+1}\geq\frac{1}{a+1},\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{4b+1}\geq\frac{1}{b+1},\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{4c+1}\geq\frac{1}{c+1}$$

將三式相加，可得：

$$1+\frac{1}{4a+1}+\frac{1}{4b+1}+\frac{1}{4c+1}\geq\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4a+1}+\frac{1}{4b+1}+\frac{1}{4c+1}\geq 1 \qquad (\because \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2)$$

$$\Leftrightarrow (4b+1)(4c+1)+(4c+1)(4a+1)+(4a+1)(4b+1)\geq(4a+1)(4b+1)(4c+1)$$

$$\Leftrightarrow 16(ab+bc+ca)+8(a+b+c)+3\geq 64abc+16(ab+bc+ca)+4(a+b+c)+1$$

$$\Leftrightarrow 4(a+b+c)+2\geq 64abc$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b+c)+1\geq 32abc$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{2abc}\geq 16$$

故當$3=4a+1,\ 3=4b+1,\ 3=4c+1$，即$a=b=c=\frac{1}{2}$時，等號成立。

筆試參考解答

題目：

已知有五個不同的四位數，它們的千位數字相同且它們的和恰能被其中的四個數整除，求所有滿足此條件的五個數。

<table>
<tr><td rowspan="3">解
析</td><td>類　　型</td><td colspan="3">☐ 代數(A)　■ 數論(N)　☐ 幾何(G)　☐ 組合(C)</td></tr>
<tr><td>試題出處</td><td colspan="3">☐ 自編　　☐ 改編於：大陸競賽試題</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>☐ 難　☐ 中等　■ 易</td><td>編 號</td><td>筆試一(2)</td></tr>
</table>

解答： 設此五個數為a_1, a_2, a_3, a_4, a_5，而其千位數字為 k

令S為此五個數的和

$1000k \le a_i < 1000(k+1) \qquad i = 1, 2, 3\ 4, 5$

$a_i + 4000k \le S < 4000(k+1) + a_i$

$$1 + \frac{4k}{1+k} < 1 + \frac{4k}{a_i/1000} \le \frac{S}{a_i} < 1 + \frac{4(k+1)}{\frac{a_i}{1000}} < 1 + \frac{4(k+1)}{k} = 5 + \frac{4}{k}$$

$k = 1$，$3 < \frac{S}{a_i} < 9$，　$\frac{S}{a_i}$ 的可能值為 4, 5, 6, 7, 8

$k \ge 2$，不可能包括上面那些數

$\frac{S}{a_i}$ 的值為(i) 4, 5, 6, 7　或　(ii) 5, 6, 7, 8

(i) $S = 4a_i$，$S = 5a_i$，$S = 6a_i$，$S = 7a_i$

所以 $S = 420t$，因此五個數為 $60t, 70t, 84t, 105t, 101t$

$t = 17$,　1020, 1190, 1428, 1785, 1717

$t = 18$,　1080, 1260, 1512, 1890, 1818

$t = 19$,　1140, 1330, 1596, 1995, 1919

(ii) $S = 5a_i$，$S = 6a_i$，$S = 7a_i$，$S = 8a_i$

所以 $S = 840t$，因此五個數為 $105t, 120t, 140t, 168t, 307t$

但$\frac{307t}{105t} > 2$ (不滿足條件)

故五數為(i)中之數

筆試參考解答

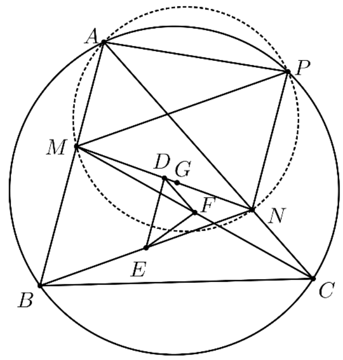
題目：

如圖，設銳角三角形ABC中，$\overline{AC}>\overline{AB}$，點$M,N$分別在邊$AB,AC$上滿足$\overline{AM}<\overline{AN}$，$\triangle ABC$與$\triangle AMN$的外接圓交於相異兩點$A,P$。設$D,E,F$分別為$\overline{MN},\overline{BN},\overline{CM}$的中點，$\triangle DEF$的外接圓與$\overline{MN}$再交於$D$與$N$之間的一點$G$。

證明：

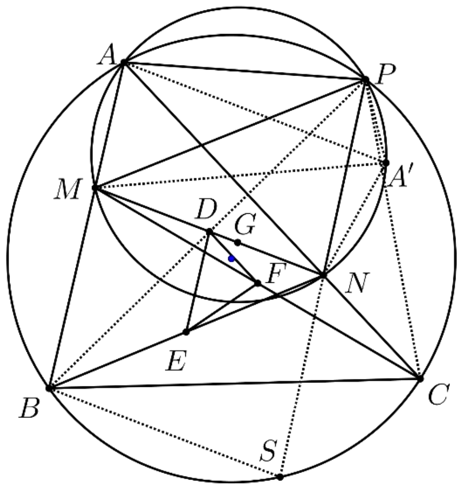
(1) $\triangle DEF\sim\triangle PMN$；

(2) $\dfrac{\overline{ED}}{\overline{EG}}=\dfrac{\overline{MP}}{\overline{NA}}$。



解析	**類　型**	□ 代數(A)　□ 數論(N)　■ 幾何(G)　□ 組合(C)		
	試題出處	■ 自編　□ 改編於：		
	難 易 度	□ 難　■ 中等　□ 易	**編 號**	**筆試一(3)**

解答：



1. 先觀察 $\Delta PMN\sim\Delta PBC$ ： PN 與 ΔABC 的外接圓再交於點 S． 則 $\angle MPN=\angle MAN=\angle BAC=\angle BPC$，
$\angle PNM=180°-\angle BAP=\angle BSP=\angle BCP$
所以得 $\Delta PMN\sim\Delta PBC$．

2. 因此得 $\angle MPB=\angle MPN-\angle BPN$
$=\angle BPC-\angle BPN=\angle NPC$
且 $\dfrac{MP}{BP}=\dfrac{NP}{CP}$． 故 $\Delta PMB\sim\Delta PNC$．

3. 因 D,E,F 為中點， $DE\parallel AB, DF\parallel AC$， 得
$\angle EDF=\angle BAC=\angle MAC=\angle MPN$．
又 $\dfrac{DE}{DF}=\dfrac{\frac{1}{2}MB}{\frac{1}{2}NC}=\dfrac{PM}{PN}$ （$\because\Delta PMB\sim\Delta PNC$）． 由此得 ΔPMN 與 ΔDEF 相似。

4. 設 A' 為 ΔAMN 的外接圓上一點使得 $AA'\parallel MN$， 所以 $AMNA'$ 為圓內接等腰梯形，得
$\angle GDE=\angle NMB=\angle A'AM=\angle A'PM$ 或 $180°-\angle A'PM$．
所以得 $\dfrac{\overline{ED}}{\overline{EG}}=\dfrac{\sin\angle DFE}{\sin\angle GDE}=\dfrac{\sin\angle PNM}{\sin\angle A'PM}=\dfrac{\overline{MP}}{\overline{MA'}}=\dfrac{\overline{MP}}{\overline{NA}}$．

筆試參考解答

題目：				
設a,b,c為正整數，且$c(ac+1)^2=(5c+2b)(2c+b)$，試證：c必為奇數且c為完全平方數。				
解析	**類　型**	□ 代數(A)　■ 數論(N)　□ 幾何(G)　□ 組合(C)		
	試題出處	□ 自編　■ 改編於：Math competition		
	難易度	□ 難　■ 中等　□ 易	**編號**	**筆試二(1)**

解答：

(1) 利用反證法，假設 c 為偶數，即 $c=2c_1$。

原式改寫為：$c_1(2ac_1+1)^2=(5c_1+b)(4c_1+b)$

令 $d=(b,c_1)$ $\therefore$ 令 $b=db_0,\ c_1=dc_0$，其中 $(b_0,c_0)=1$。

$\Rightarrow$ $c_0(2adc_0+1)^2=d(5c_0+b_0)(4c_0+b_0)$

$\because (c_0,5c_0+b_0)=(c_0,4c_0+b_0)=1$ 且 $(d,(2adc_0+1)^2)=1\Rightarrow d\mid c_0,\ c_0\mid d$

$\therefore d=c_0$ 且 $(2adc_0+1)^2=(5c_0+b_0)(4c_0+b_0)$

$\because (5c_0+b_0,4c_0+b_0)=(c_0,4c_0+b_0)=(c_0,b_0)=1$

因此可設 $5c_0+b_0=m^2,\ 4c_0+b_0=n^2$，其中 m,n 為正整數，所以 $m>n$，即 $m-n\ge 1$ $\Rightarrow$ $d=c_0=m^2-n^2\Rightarrow$ $2ad^2+1=2adc_0+1=mn$，因此

$$mn=1+2ad^2=1+2a(m^2-n^2)^2=1+2a(m-n)^2(m+n)^2$$
$$\ge 1+2a(m+n)^2\ge 1+8amn\ge 1+8mn$$

即 $7mn\le -1$　（不合），所以 c 不為偶數。

(2) 令 $d=(b,c)$ 且 $b=db_0,c=dc_0$，其中 $M(b_0,c_0)=1$

則原式為 $c_0(adc_0+1)^2=d(5c_0+2b_0)(2c_0+b_0)$

$\because (b_0,c_0)=1$ 且 c_0 為奇數，

$\therefore (c_0,2c_0+b_0)=1=(c_0,5c_0+2b_0)\Rightarrow c_0\mid d$，又 $(d,(adc_0+1)^2)=1\Rightarrow d\mid c_0$

所以 $c_0=d,\ c=dc_0=d^2$，得證。■

筆試參考解答

<table>
<tr><td colspan="4">題目：
$S=\{2350,\ 2351,\ \cdots,\ 2350+k\}$，求所有的正整數$k$，使得集合$S$能分成元素和相等且交集為空集合的兩個子集合$S_1$與$S_2$。</td></tr>
<tr><td rowspan="3">解析</td><td>類　型</td><td colspan="3">☐ 代數(A)　☐ 數論(N)　☐ 幾何(G)　■ 組合(C)</td></tr>
<tr><td>試題出處</td><td colspan="3">☐ 自編　■ 改編於：大陸競賽題</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>☐ 難　☐中等　■易</td><td>編 號</td><td>筆試二(2)</td></tr>
</table>

解答： $\sum_{n=0}^{k}(2350+n)=2350(k+1)+\frac{k(k+1)}{2}$ 必為偶數

$4|k(k+1)$，則 $k=4h$ 或 $k=4h+3$

(i) 設 $k=4h+3$，$h=0,1,2,\ldots.$

令$S_1=\{2350+i|i=4h,4h+3,h=0,1,2,\ldots,\left[\frac{k}{4}\right]\}$

$S_2=\{2350+i|i=4h+1,4h+2,h=0,1,2,\ldots,\left[\frac{k}{4}\right]\}$

則 S_1 與 S_2 滿足所求，因此對所有非負整數 h，$k=4h+3$ 均為所求

(ii) $k=4h$，$h=1,2,\ldots.$

不失其一般性，S_1 元素的個數$\geq 2h+1$，S_2 元素的個數$\leq 2h$

即$\sum_{j=0}^{2h}(2350+j)\leq\sum_{j=2h+1}^{4h}(2350+j)=(2h)^2+\sum_{j=1}^{2h}(2350+j)$

$h\geq 25$，則$k\geq 100$

若$k=4h$且$k\geq 100$，則 S 存在滿足的二子集合分割

$k=100$

$S_3=\{2350,2351,\ldots,2350+50\}$

$S_4=\{2350+51,2350+52,\ldots,2350+100\}$

S_3 中元素的和為$2350\times 51+1275$，

S_4 中元素的和為$2350\times 50+1275+2500$

所以$S_1=S_3\cup\{2425\}-\{2350\}$，$S_2=S_4\cup\{2350\}-\{2425\}$

$k>100$

則前面 101 個數依上面的方式來分，而後面$k-100=4h$的數，每相連接的四個數則依 (i)的方式來分即可。

故所有的正整數值為:$\{k|k=4h+3,h=0,1,2,\ldots；k=4h,h=25,26,\ldots\}$

筆試參考解答

題目： 設$x \geq 3$且三角形的三邊長為$\log x$，$\log(x+1)$和$\log(x^2+1)$。證明此三角形為鈍 角三角形且其鈍內角度數大於120°。				
解析	**類　型**	□ 代數(A)　□ 數論(N)　■ 幾何(G)　□ 組合(C)		
	試題出處	■ 自編　□ 改編於：		
	難 易 度	■ 難　□ 中等　□ 易	**編 號**	**筆試二(3)**

解答：

三角形的最長邊為$\log(x^2+1)$，對應此邊的內角的餘弦為

$$\frac{(\log x)^2+(\log(x+1))^2-(\log(x^2+1))^2}{2\log x\log(x+1)}$$

以下證明此式小於$\cos 120^{\circ}=-\frac{1}{2}$，也就是鈍內角度數大於$120^{\circ}$。由

$$\frac{(\log x)^2+(\log(x+1))^2-(\log(x^2+1))^2}{2\log x\log(x+1)}<-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow (\log x+\log(x+1))^2-(\log(x^2+1))^2<\log x\log(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \log\frac{x(x+1)}{x^2+1}\log x(x+1)(x^2+1)<\log x\log(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \log\frac{x(x+1)}{x^2+1}\log x(x+1)(x^2+1)<\log x^{\frac{1}{4}}\log(x+1)^4$$

只需證明：當$x \geq 3$時，

(1). $x^{1/4}>\frac{x(x+1)}{x^2+1}$

(2). $(x+1)^4>x(x+1)(x^2+1)$

其中(2)明顯成立，對於(1)可由$x^{1/4}>\frac{x(x+1)}{x^2+1}\Leftrightarrow x>\left(\frac{x(x+1)}{x^2+1}\right)^4$

令$x=a+3, a\geq 0$代入上式，即需證明

$$a+3>\left(\frac{a^2+7a+12}{a^2+6a+10}\right)^4=\left(1+\frac{a+2}{a^2+6a+10}\right)^4$$

注意

$$\left(1+\frac{a+2}{a^2+6a+10}\right)^4<\left(1+\frac{a+2}{(a+2)(a+4)}\right)^4=\left(1+\frac{1}{a+4}\right)^4\leq\left(1+\frac{1}{4}\right)^4<3\leq a+3$$

至此證明完畢。

柒、口試試題及參考解答

111 學年度普通型高級中學數學科能力競賽(決賽)

口 試 試 題

注意事項：

(1) 試卷共 2 題，參賽者可先在本試卷上作答，思考時間 20 分鐘；

(2) 攜帶本試卷到口試教室應試，答辯時間 20 分鐘，並繳回本試卷；

(3) 口試完成後由助理引導至 M716 教室，繼續作答獨立研究。

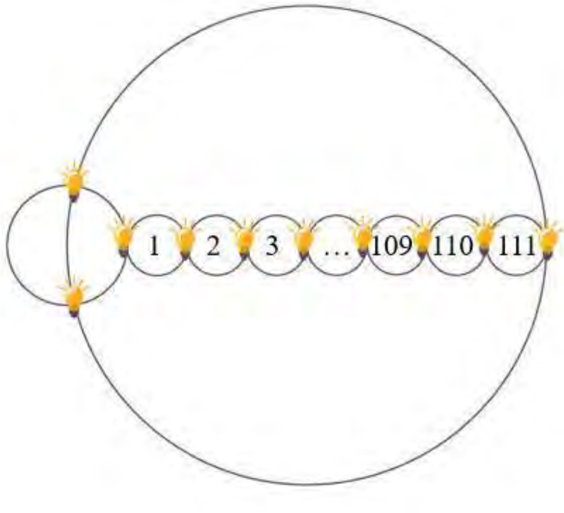
學生編號：______________

一、 設n為正整數。已知不等式$a_{2n}^2 \geq c(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}) + a_{2n}$對任意嚴格遞增的正整數數列$a_1 < a_2 < \cdots < a_{2n}$均成立，試求常數$c$的最大可能值。(此最大值可能與$n$有關)

【解答】

二、 以下圖形為某公園的道路圖，每個道路交叉口都有一盞燈，可以是打開的或關掉的。每一個被道路分割產生的區域都有一個開關，按這個開關後會改變相鄰的路燈的狀態，開的會被關掉，關掉的會被打開。請證明不論開始所有路燈開關的情形為何，都可以適當的按壓不同區域的開關，讓所有的燈都被關掉。

【解答】



口試參考解答

題目：

設n為正整數。已知不等式$a_{2n}^2 \ge c(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+a_{2n}$對任意嚴格遞增的正整數數列$a_1<a_2<\cdots<a_{2n}$均成立，試求常數$c$的最大可能值。(此最大值可能與$n$有關)

解析		
類　型	■ 代數(A)　□ 數論(N)　□ 幾何(G)　□ 組合(C)	
試題出處	□ 自編　■ 改編於：2003 中國女子數奧競賽	
難易度	□ 難　□ 中等　■ 易	編號：口試一

解答： 常數 c 的最大可能值為 $\dfrac{4n-2}{n}$。

令 $a_i=i$，則 $(2n)^2\ge c\big(1+3+\cdots+(2n-1)\big)+2n=cn^2+2n$，整理可得 $c\le\dfrac{4n-2}{n}$。

以下證明：對任意的嚴格遞增正整數數列 $a_1<a_2<\cdots<a_{2n}$，都有

$$a_{2n}{}^2\ge\frac{4n-2}{n}\left(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}\right)+a_{2n}。$$

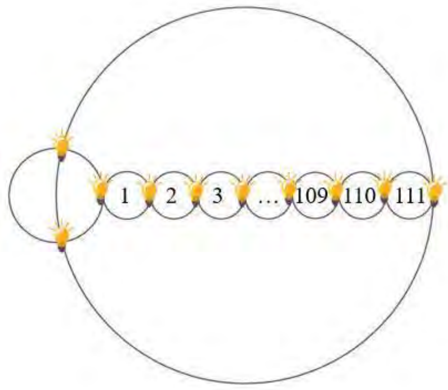
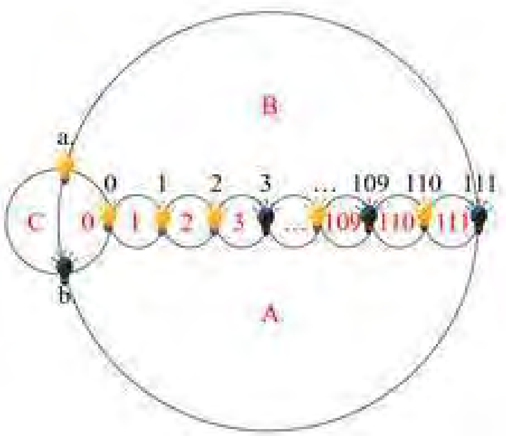
由於對任一 $i=1,2,\ldots,2n-1$，都有 $a_i\le a_{2n}-(2n-i)$。所以

$$\begin{aligned}
左-右&=a_{2n}{}^2-\frac{4n-2}{n}\sum_{i=1}^{n}a_{2i-1}-a_{2n}\\
&\ge a_{2n}{}^2-\frac{4n-2}{n}\left(na_{2n}-\sum_{i=1}^{n}(2n-(2i-1))\right)-a_{2n}\\
&=a_{2n}{}^2-\frac{4n-2}{n}\left(na_{2n}-n^2\right)-a_{2n}\\
&=a_{2n}{}^2-(4n-1)a_{2n}+(4n^2-2n)\\
&=(a_{2n}-2n)^2+(a_{2n}-2n)
\end{aligned}$$

因為 $a_{2n}\ge 2n$，故上式恆大於或等於 0，得證。

註：原題為：給定正整數 n，找出最大實數 λ，使得不等式 $a_n\ge\lambda\left(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}\right)+2a_n$ 對任意遞增正整數數列 $a_1<a_2<\cdots<a_n$ 均成立。答案：$\dfrac{2n-4}{n-1}$。

口試參考解答

<table>
<tr><td colspan="6">題目：
以下圖形為某公園的道路圖，每個道路交叉口都有一盞燈，可以是打開的或關掉的。每一個被道路分割產生的區域都有一個開關，按這個開關後會改變相鄰的路燈的狀態，開的會被關掉，關掉的會被打開。請證明不論開始所有路燈開關的情形為何，都可以適當的按壓不同區域的開關，讓所有的燈都被關掉。

</td></tr>
<tr><td rowspan="3">解析</td><td>類　型</td><td colspan="4">☐ 代數(A)　☐ 數論(N)　☐ 幾何(G)　■ 組合(C)</td></tr>
<tr><td>試題出處</td><td colspan="4">■ 自編　☐ 改編於：</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>☐ 難　☐ 中等　■ 易</td><td>編 號</td><td colspan="2">口試二</td></tr>
<tr><td colspan="6">解答：我們把區域編號如下(0-111,A,B,C)，同時也把路燈編號為 0-111, a,b，燈 n 是第 n 區右邊的路燈，a,b 則分別是 0 區的上和下。開始時如果 a,b 一開一關，我們可以按 A 讓它們同開或同關。假設燈 n+1-111 都是關的，燈 n 是開的，可以按區域 n 讓燈 n-111 都是關的，而且 a,b 仍然是同開或同關。重覆同樣的方法，可以把 0-111 都關掉。這時如果 a,b 也是關的就完成了，如果 a,b 都是開的，只要再按 C 區就可以把它們關掉。

</td></tr>
</table>

捌、獨立研究試題及參考解答

111 學年度普通型高級中學數學科能力競賽(決賽)
獨立研究（一）試題卷

注意事項：

(1) 三題中自選兩題作答，並請註明題號
(2) 時間：1.5 小時（8:30～10:00）
(3) 配分：每題皆為 7 分
(4) 不可使用計算器
(5) 請將答案寫在答案卷內

學生編號：______________

一、已知實數a,b,c皆介於0與1之間，且x,y,z為正實數，如果$a^x=bc$，$b^y=ca$，$c^z=ab$，試證：

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}\le\frac{3}{4}\text{。}$$

二、若m個互不相同的正偶數與n個互不相同的正奇數之總和為2022，求滿足這樣條件的m與n，其$4m+3n$的最大值。

三、數線上每個整數的位置有一個箱子(規定箱子編號即為其所在的整數位置)，位於原點的箱子(故此箱編號為0)中有一個石頭，其他箱子都是空的，每一次我們可以進行下列操作之一：

(1). (分裂)在某個非空箱子拿出一個石頭，然後在其左、右的箱子個放入一顆石頭。

(2). (合併)選擇編號相差2的兩個非空箱子，各拿出一個石頭，然後在中間箱子放入一個石頭。

如果經過若干次操作之後，竟然只剩下一個石頭，試求出這個石頭所在箱子編號的所有可能。

111 學年度普通型高級中學數學科能力競賽(決賽)

獨立研究（二）試題卷

注意事項：

(1) 三題中自選兩題作答，並請註明題號
(2) 時間：1.5 小時（10:20～11:50）
(3) 配分：每題皆為 7 分
(4) 不可使用計算器
(5) 請將答案寫在答案卷內

學生編號：______________

一、設$\{a_n\}$為一個無窮的整數數列，且滿足$a_n \neq -1$，
$a_{n+2}a_{n+1} + a_{n+2} - a_n - 108 = 0, n \in \mathbb{N}$，求這種$\{a_n\}$的個數有多少？

二、對於一個$\{1,\ 2, \cdots, n\}$的排列$\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n$，定義一隨機變數$X$如下：先約定$\sigma_0 = \sigma_{n+1} = 0$。對$1 \leq i \leq n$，如果$\sigma_{i-1} < \sigma_i$且$\sigma_i > \sigma_{i+1}$，則稱$\sigma_i$是一個“山頂”。定義$X$取值為“山頂出現的次數”。例如：53261784有三個山頂$(5,6,8)$，故$X = 3$。若每個$\{1,\ 2, \cdots, n\}$的排列被選取的機會相同，求$E(X)$。

三、圓內接四邊形$ABCD$的一組對邊AD和BC的延長線相交於點P，另一組對邊AB和CD的延長線相交於點Q，$\angle P$和$\angle Q$的平分線相交於點R。對角線AC與BD相交於點K，$\angle DKC$的平分線交CP於點M。求證：
（1）$PR \perp QR$；
（2）$QR \perp KM$。

獨立研究參考解答

題目：

已知實數a,b,c皆介於0與1之間，且x,y,z為正實數，如果$a^x=bc$，$b^y=ca$，$c^z=ab$，試證：

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}\le\frac{3}{4}\text{。}$$

解析		
	類　型	■ 代數(A)　□ 數論(N)　幾何(G)　□ 組合(C)
	試題出處	□ 自編　■ 改編於：Math competition
	難易度	□ 難　■ 中等　□ 易
	編號	獨立研究一(1)

解答：令$u=\log_{\frac{1}{2}}a,\ v=\log_{\frac{1}{2}}b,\ w=\log_{\frac{1}{2}}c$，由$a^x=bc\Rightarrow x\log_{\frac{1}{2}}a=\log_{\frac{1}{2}}b+\log_{\frac{1}{2}}c\Rightarrow x=\dfrac{v+w}{u}$，

同理可得 $y=\dfrac{u+w}{v},\ z=\dfrac{u+v}{w}$。

欲證: $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{y+2}+\dfrac{1}{z+2}\le\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\frac{v+w}{u}+2}+\dfrac{1}{\frac{u+w}{v}+2}+\dfrac{1}{\frac{u+v}{w}+2}\le\dfrac{3}{4}$

$\Leftrightarrow\dfrac{u}{2u+v+w}+\dfrac{v}{u+2v+w}+\dfrac{w}{u+v+2w}\le\dfrac{3}{4}$。

令$s=u+v+w$，因此上式

$$\Leftrightarrow\frac{u}{s+u}+\frac{v}{s+v}+\frac{w}{s+w}\le\frac{3}{4}\Leftrightarrow\left(1-\frac{u}{s+u}\right)+\left(1-\frac{v}{s+v}\right)+\left(1-\frac{w}{s+w}\right)\ge\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{s}{s+u}+\frac{s}{s+v}+\frac{s}{s+w}\ge\frac{9}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{s+u}+\frac{1}{s+v}+\frac{1}{s+w}\ge\frac{9}{4s}\Leftrightarrow 4s\left(\frac{1}{s+u}+\frac{1}{s+v}+\frac{1}{s+w}\right)\ge 9$$

利用柯西不等式，可得

$$4s\left(\frac{1}{s+u}+\frac{1}{s+v}+\frac{1}{s+w}\right)=[(s+u)+(s+v)+(s+w)]\left(\frac{1}{s+u}+\frac{1}{s+v}+\frac{1}{s+w}\right)\ge(1+1+1)^2=9\text{，}$$

因此$\dfrac{s}{s+u}+\dfrac{s}{s+v}+\dfrac{s}{s+w}\ge\dfrac{9}{4}\Rightarrow\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{y+2}+\dfrac{1}{z+2}\le\dfrac{3}{4}$，故得證。

獨立研究參考解答

題目：

若m個互不相同的正偶數與n個互不相同的正奇數之總和為2022，求滿足這樣條件的m與n，其$4m+3n$的最大值。

<table>
<tr><td rowspan="3">解
析</td><td>類　　型</td><td colspan="3">☐ 代數(A)　■ 數論(N)　☐ 幾何(G)　☐ 組合(C)</td></tr>
<tr><td>試題出處</td><td colspan="3">☐ 自編　　■ 改編於：高中數學競賽教程</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>☐ 難　■ 中等　☐ 易</td><td>編 號</td><td>獨立研究一(2)</td></tr>
</table>

解答：

設$2 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_m$為$m$個互不相同的正偶數及$1 \le b_1 < b_2 < \cdots < b_n$為$n$個互不相同的正奇數。

由題意知$2022 = a_1 + a_2 + \cdots + a_m + b_1 + b_2 + \cdots + b_n \ge 2 + 4 + \cdots + 2m + 1 + 3 + \cdots + 2n - 1 = m^2 + m + n^2$

故$\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 + n^2 \le 2022 + \frac{1}{4}$

利用柯西不等式，可得$4\left(m+\frac{1}{2}\right) + 3n \le 5\sqrt{2022+\frac{1}{4}}$

故$4m+3n \le \left\lfloor 5\sqrt{2022+\frac{1}{4}} - 2 \right\rfloor = 222$

取$m=36$，$n=26$，可得$4m+3n=222$

取 2, 4, ..., 68, 70, 72 共 36 個偶數，並取 1, 3, ...,49, 51 共 26 個奇數，此時總和為 2008。

故可取 2, 4, ..., 68, 70 共 35 個偶數以及 86，並取 1, 3, ...,49, 51 共 26 個奇數。

獨立研究參考解答

<table>
<tr><td colspan="5">

題目：

數線上每個整數的位置有一個箱子(規定箱子編號即為其所在的整數位置)，位於原點的箱子(故此箱編號為0)中有一個石頭，其他箱子都是空的，每一次我們可以進行下列操作之一：

(1). (分裂)在某個非空箱子拿出一個石頭，然後在其左、右的箱子個放入一顆石頭。

(2). (合併)選擇編號相差2的兩個非空箱子，各拿出一個石頭，然後在中間箱子放入一個石頭。

如果經過若干次操作之後，竟然只剩下一個石頭，試求出這個石頭所在箱子編號的所有可能。

</td></tr>
<tr><td rowspan="3">解析</td><td>類　　型</td><td colspan="3">□ 代數(A)　□ 數論(N)　□ 幾何(G)　■ 組合(C)</td></tr>
<tr><td>試題出處</td><td colspan="3">■ 自編　　□ 改編於：</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>□ 難　■ 中等　□ 易</td><td>編 號</td><td>獨立研究一(3)</td></tr>
<tr><td colspan="5">

解答： 箱子所有可能的編號為 6 的整數倍。

首先不難操作使得只有一個石頭在編號 6 的箱子中，平移得到所有 6 的倍數皆可以。其次，將位於編號為n的箱子中的每一個石頭賦值$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n$，則每次操作後所有石頭的賦值之和是一個不變量。(動機是左中右為$\cdots,\frac{1}{x^2},\frac{1}{x},1,x,x^2,\cdots$,要有$1+x^2=x$，解得$x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$，即為 1 的六次方根)

但一開始的石頭賦值總合為 1，故除了編號為 6 的倍數外皆不可能。

</td></tr>
</table>

獨立研究參考解答

題目：

設$\{a_n\}$為一個無窮的整數數列，且滿足$a_n \neq -1$，

$a_{n+2}a_{n+1} + a_{n+2} - a_n - 108 = 0, n \in \mathbb{N}$，求這種$\{a_n\}$的個數有多少？

<table>
<tr><td rowspan="3">解析</td><td>類　　型</td><td colspan="3">■ 代數(A)　□ 數論(N)　□ 幾何(G)　□ 組合(C)</td></tr>
<tr><td>試題出處</td><td colspan="3">□ 自編　　■ 改編於：大陸競賽試題</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>□難　□中等　■易</td><td>編 號</td><td>獨立研究二(1)</td></tr>
</table>

解答：$a_{n+3}a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+1} - 108 = 0$

$$a_{n+2}a_{n+1} + a_{n+2} - a_n - 108 = 0$$

$$a_{n+2} - a_n = (a_{n+2} + 1)(a_{n+3} - a_{n+1})$$

$$a_3 - a_1 = (a_3 + 1)(a_4 - a_2)$$

$$a_4 - a_2 = (a_4 + 1)(a_5 - a_3)$$

………………………………...

(i) 若$a_3 - a_1 \neq 0$，得$a_4 - a_2 \neq 0$，得$a_5 - a_3 \neq 0$，……

對$n \geq 1$

$$0 < |a_{n+3} - a_{n+1}| = |a_{n+2} - a_n| \cdot \frac{1}{|a_{n+2}+1|} \leq |a_{n+2} - a_n|$$

所以，$\{|a_{n+2} - a_n|\}$為非遞增正整數序列

存在 N，對於所有$n \geq N$

$|a_{n+2} + 1| = 1$， 即對於$n \geq N + 2$，$a_n = 0, -2$

因為 $a_{N+4} = \frac{a_{N+2}+108}{a_{N+3}+1}$，所以 a_{N+4} 之值可能為

$$\frac{0+108}{0+1} = 108，\frac{0+108}{-2+1} = -108，\frac{-2+108}{0+1} = 106，\frac{-2+108}{-2+1} = -106$$

$a_{N+4} = 0, -2$ 所以不可能

(ii) 若$a_3 - a_1 = 0$，得$a_4 - a_2 = 0$，得$a_5 - a_3 = 0$，….

則$a_1 = a_3 = a_5 = \cdots$；$a_2 = a_4 = a_6 = \cdots$，

$n = 1$，$a_1 = a_3$ 得$a_1 = \frac{a_1+108}{a_2+1}$，即$a_1a_2 = 108 = 2^2 3^3$

a_1值的個數為 2(2+1)(3+1)去除當其值為$-1, -108$，所以為 22 個，$a_2 = \frac{108}{a_1}$

此數列型式為 $a_1, a_2, a_1, a_2, a_1, a_2, \ldots.$

獨立研究參考解答

題目：

對於一個$\{1,\ 2,\cdots,n\}$的排列$\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$，定義一隨機變數$X$如下：
先約定$\sigma_0=\sigma_{n+1}=0$。對$1\le i\le n$，如果$\sigma_{i-1}<\sigma_i$且$\sigma_i>\sigma_{i+1}$，則稱σ_i是一個“山頂”。定義X取值為“山頂出現的次數”。例如：53261784有三個山頂$(5,6,8)$，故$X=3$。若每個$\{1,\ 2,\cdots,n\}$的排列被選取的機會相同，求$E(X)$。

<table>
<tr><td rowspan="3">解析</td><td>類　型</td><td colspan="3">☐ 代數(A)　☐ 數論(N)　☐ 幾何(G)　■ 組合(C)</td></tr>
<tr><td>試題出處</td><td colspan="3">■ 自編　　☐ 改編於：</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>☐ 難　■ 中等　☐ 易</td><td>編 號</td><td>獨立研究二(2)</td></tr>
</table>

解答：

考慮一表格，以排列為列，以$1,\ 2,\cdots,n$為行，若j是σ_i的山頂，則填$(\sigma_i,\mathrm{j})=$●，否則填○。只要算有幾個●即可，關鍵是直著算。

引理：第j行有$\mathrm{j}(\mathrm{j}-1)(\mathrm{n}-2)!$個●

證明：易得第一行沒有●，第 2 行有$2\times(\mathrm{n}-2)!$個●，第n行每個位置都是●

對於第j行$(3\le \mathrm{j}\le \mathrm{n}-1)$

1. 若$\sigma_1=j$為山頂，則σ_2有$\mathrm{j}-1$種可能，故有$(\mathrm{j}-1)\times(\mathrm{n}-2)!$種可能
2. 若$\sigma_n=j$為山頂，則σ_{n-1}有$\mathrm{j}-1$種可能，故有$(\mathrm{j}-1)\times(\mathrm{n}-2)!$種可能
3. 若$\sigma_k=j$為山頂，則$\sigma_{k-1}\in\{1,2,\cdots,j-1\}$有$\mathrm{j}-1$種可能，
$\sigma_{k+1}\in\{1,2,\cdots,j-1\}-\{\sigma_{k-1}\}$有$\mathrm{j}-2$種可能，故有$(\mathrm{j}-1)(\mathrm{j}-2)\times(\mathrm{n}-3)!$ 個●，但k有$\mathrm{n}-2$個可能值，因此一共有
$$(\mathrm{j}-1)(\mathrm{j}-2)\times(\mathrm{n}-3)!\times(\mathrm{n}-2)=(\mathrm{j}-1)(\mathrm{j}-2)\times(\mathrm{n}-2)!$$
個●。

由 1+2+3 得$\mathrm{j}(\mathrm{j}-1)\times(\mathrm{n}-2)!$，且此式對$\mathrm{j}=1,2,\mathrm{n}$也都成立，故引理得證。

因此所求為

$$\mathrm{E(X)}=\begin{cases}\dfrac{\sum_{j=1}^{n} j(j-1)(n-2)!}{n!}=\dfrac{n+1}{3},\ n\ge 2\\ 1,\ n=1\end{cases}$$

獨立研究參考解答

題目：

圓內接四邊形$ABCD$的一組對邊AD和BC的延長線相交於點P，另一組對邊AB和CD的延長線相交於點Q，$\angle P$和$\angle Q$的平分線相交於點R。對角線AC與BD相交於點K，$\angle DKC$的平分線交CP於點M。求證：

(1). $PR \perp QR$；

(2). $QR \perp KM$。

解析	類　型	□ 代數(A)　□ 數論(N)　■ 幾何(G)　□ 組合(C)		
	試題出處	□ 自編　■ 改編於：大陸競賽訓練試題		
	難 易 度	□ 難 ■ 中等 □ 易	編 號	獨立研究二(3)

解答：

設直線 PR 交 DC、DB、BA 分別於點 E、F、G。

(1) 因 $\angle EFQ = \angle BAD + \angle APF$、$\angle FEQ = \angle DCP + \angle EPC$，且 $\angle BAD = \angle DCP$、$\angle APF = \angle EPC$，所以 $\angle EFQ = \angle FEQ$。 又因 QR 為頂角 $\angle FQE$ 的角平分線，故 $PR \perp QR$。

(2) 因為

$$\angle DKM = \frac{1}{2}\angle DKC = \frac{1}{2}(\angle ADB + \angle DAC)$$

$$\angle DGP = \angle ADB - \angle APG = \angle ADB - \frac{1}{2}\angle APB = \angle ADB - \frac{1}{2}(\angle ACB - \angle DAC)$$

$$= \frac{1}{2}(\angle ADB + \angle DAC)$$

所以 $\angle DKM = \angle DGP$，得 $KM \parallel RP$，故由(1)即得 $QR \perp KM$。

玖、111 學年度各分區複賽試題

111 學年度第一區（花蓮高中）

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試（一）試題

編號：______________（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 46 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一：一組數據由五個正整數組成。已知數據平均值為 12，最大值與最小值之差為 18，眾數及中位數都是 8。試列出這組數據所有的可能值。

(10 分)

問題二：設 m 為十進位制的正整數，已知 m 之各個位數的乘積等於 $m^2-10m-22$，試求 m 的所有可能值。

(12 分)

《背面尚有試題》

問題三： 設Γ為座標平面上以原點為圓心，半徑為r的一個圓且A,B,C為該圓周上的三個相異之格子點（指其x,y座標都是整數的點）。試證明：

(1)三角形ABC的面積$\geq\frac{1}{2}$。 (4 分)

(2)三角形ABC的最長邊之邊長大於$r^{\frac{1}{3}}$。 (8 分)

問題四： 設複數$z=x+iy$，其中x,y都是有理數。已知$|z|=1$，試證明：對任一整數n，$\left|z^{2n}-1\right|$必為有理數。

(12 分)

《試題結束》

111 學年度第一區（花蓮高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（二）試題

編號：______________（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共八題填充題，每題 3 分，滿分為 24 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案依序填寫在答案欄內。

1. 若 f 為定義在自然數的函數且

$$f(n)=\begin{cases}\log_8 n, & \text{當}\log_8 n\text{為有理數時；}\\ 0 & \text{,其它，}\end{cases}$$

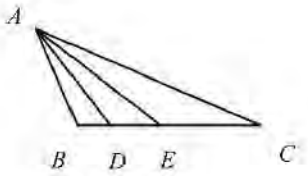
則 $\sum_{n=1}^{2022} f(n)=$ ____(一)____。

2. 若正實數 a,b 滿足 $\log_9 a=\log_{12} b=\log_{16}(a+b)$，則 $\dfrac{b}{a}=$ ____(二)____。

3. 設 n 為正整數，若 x^{n+2} 除以 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 之餘式為 $R(x)$，則 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{R(-1)}{R(0)}=$ ____(三)____。

《背面尚有試題》

4. 如圖，在ΔABC中，設$\overline{AD}$、$\overline{AE}$三等分$\angle A$。若$\overline{BD}=2$，$\overline{DE}=3$，$\overline{EC}=6$，則ΔABC的最短邊之邊長為____(四)____。



5. 設四邊形有一外接圓且有一內切圓，其四邊邊長分別為 42, 54, 78, 66。若最長邊被內切圓的切點分成長度為x, y兩線段，則數對$(x, y)=$____(五)____。

6. 設a,b,c為正整數且滿足$a+b+c=35$，若a,b,c為三角形之三邊長，則數對(a,b,c)共有____(六)____組。

7. 將一枚均勻的骰子拋擲 3 次，在頭兩次得到點數和等於第三次得到的點數情形下，至少擲出一個 2 點的機率為____(七)____。

8. 若$0\le x\le 2\pi$，則滿足$\tan^2 x-9\tan x+1=0$的所有x值之和為____(八)____。

《試題結束》

111 學年度第一區（花蓮高中）

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科口試試題

編號：＿＿＿＿＿＿＿＿（學生自填）

注意事項：

1. 本口試卷共 2 題，思考時間 10 分鐘；參賽者可先在空白紙上作答，口試時請攜帶作答紙應試，口試答辯時間 10 分鐘，並繳回作答紙。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的精確度。

【口試一】

已知實數 x 滿足拉馬努金等式 $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\frac{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{x}$，求實數 x 的值。（須以最簡單形式表示）

【口試二】

設 m,n 為正整數。試判斷 $\frac{(m+n)!}{(m+n)^{m+n}}$ 與 $\frac{m!}{m^m}\cdot\frac{n!}{n^n}$ 的大小關係。

《試題結束》

111 學年度臺北市 (麗山高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試 (一) 試題

編號：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿(學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

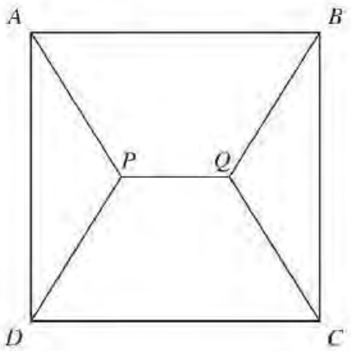
問題一：

(1) 試問方程式 $x+y+2z=14$ 有多少組非負整數解 (x,y,z)？(4 分)

(2) 試找出所有正整數 n，使得方程式 $x+y+2z=n$ 恰有 1260 組非負整數解 (x,y,z)。(8 分)

問題二：

如圖，邊長為 8 的正方形 $ABCD$ 被切割成 2 個全等的等腰梯形和 2 個全等的等腰三角形，試求正方形內的 5 條線段（$\overline{AP}$、$\overline{BQ}$、$\overline{CQ}$、$\overline{DP}$、$\overline{PQ}$）長度總和的最小值。



(12 分)

<背面尚有試題>

問題三：

試求最小的正整數 n，使得有 n 個整數 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 滿足

$$a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4 = 2077.$$

(12 分)

問題四：

已知數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 1$，且 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ 對所有正整數 n 均成立。

(1) 求 $\langle a_n \rangle$ 的一般式。(3 分)

(2) 若數列 $\langle b_n \rangle$ 滿足 $b_1 = a_1$，$\dfrac{b_n}{a_n} = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_{n-1}}$ $(n \geq 2)$，

試證：$(1+\dfrac{1}{b_1})(1+\dfrac{1}{b_2})\cdots(1+\dfrac{1}{b_n}) < \dfrac{10}{3}$，對所有正整數 n 均成立。

(10 分)

＜試題結束＞

111學年度臺北市(麗山高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(二)試題

編號：____________________(學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題3分，滿分為21分。
2. 考試時間：1小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算結果依序填寫在答案欄內。

問題：

1. 已知α,β,γ為三角形的三個內角。
設向量$\vec{u}=(\sin\beta+\cos\beta,\ \cos\gamma)$，向量$\vec{v}=(\sin\gamma,\ \sin\beta-\cos\beta)$，
若$\vec{u}\cdot\vec{v}=-\frac{1}{5}$，則$\tan 2\alpha=$ ___(一)___。

2. 由16個連續正奇數由小到大組成，每項都是四位數，且其總和為立方數的數列共有 ___(二)___ 個。

3. 對每一正整數n，令$f(n)$為n的所有正因數之平方和。例如：
$$f(12)=1^2+2^2+3^2+4^2+6^2+12^2=210.$$
則$2^{13}\left(\frac{f(640)}{640^2}-\frac{f(320)}{320^2}\right)$之值為 ___(三)___。

4. 每一項皆為0,1,2的數列，稱為三元數列。則有8項且有奇數個0的三元數列有 ___(四)___ 個。

5. 考慮最高次項係數為a的二次實係數多項式$f(x)$，且不等式$f(x)>-2x$的解為$1<x<3$。對滿足上述條件的$f(x)$，其最大值是一個a的函數，記為$G(a)$。則$G(a)$的最小可能值為 ___(五)___。

<背面尚有試題>

6. 已知a,b,c皆為正數，且以$b+c$、$\sqrt{abc}$、$\sqrt{b^2+7bc+c^2}$為長度的線段恰能構成三角形，則a的範圍為___(六)___。

7. 在一項遊戲中，有甲、乙、丙三人各投擲一顆公正的六面骰子，擲出點數最大的人獲勝；如擲出點數最大的人不只一人，這些擲出最大點數的人再各投擲一次，依此下去直到恰有一人獲勝為止。若甲第一次擲出點數為3，則甲獲勝的機率為___(七)___。

<試題結束>

111學年度臺北市(麗山高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科口試試題

編號：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿(學生自填)

注意事項：

1. 本口試卷共兩題，思考時間15分鐘；參賽者可先在計算紙上作答，口試答辯時間15分鐘，並繳回計算紙。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的細節。

【問題一】：

求最小的正整數 n，使得排列數 P_n^{2022} 以十進位法表示時，末尾恰有111個零。

(15分)

【解】

<背面尚有試題>

【問題二】：

(1) 試說明平面上存在8個點構成的點集合X，使得對X中每一個點A，都可在X中找到另四個點B_1,B_2,B_3,B_4滿足：

$$\overline{AB_1}=1,\quad \overline{AB_2}=2,\quad \overline{AB_3}=3,\quad \overline{AB_4}=\sqrt{13}.$$

(2) 試問：平面上是否存在有限多個點構成的點集合Y滿足以下性質：對Y中每一個點A，都可在Y中找到另六個點B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6使得

$$\overline{AB_1}=1,\quad \overline{AB_2}=2,\quad \overline{AB_3}=3,\quad \overline{AB_4}=\sqrt{2},\quad \overline{AB_5}=\sqrt{3},\quad \overline{AB_6}=\sqrt{13}.$$

(15分)

【解】

<試題結束>

111 學年度新北市 (板橋高中)

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試 (一) 試題

編號：____________ (學生自填)

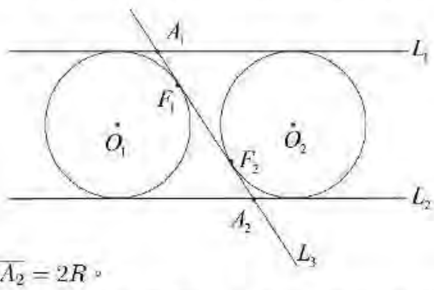
注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一： (1) 試說明每一個奇數都可以表示成兩個整數的平方差，例如：$101 = 51^2 - 50^2$。
(2) 由 $1, 3, 6, 7, 8$ 排成數字都相異的四位數中，任取一數，試求該數可以表示成兩整數之平方差的機率。

問題二： 已知函數序列 $f_1(x) = \sqrt{x}$、$f_2(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$、$f_3(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$、$\cdots$，依此類推。試求方程式 $f_{10}(x) = 2022$ 的所有實數解 (四捨五入取到整數)。

問題三： 兩圓 O_1 與 O_2 半徑皆為 r，圓心距離為 $2R$，其中 $R > r$。假設三直線 L_1、L_2 及 L_3 均同時與二圓相切，如下圖所示。其中 L_3 分別與圓 O_1、O_2 相切於點 F_1、F_2，且與直線 L_1、L_2 相交於點 A_1、A_2。



(1) 試證：$\overline{A_1A_2} = 2R$。

(2) 現有一橢圓，其長軸為 $\overline{A_1A_2}$，兩焦點分別為 F_1 與 F_2，試求其短軸長。

＜ 試題結束 ＞

111 學年度新北市 (板橋高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試 (二) 試題

編號：____________ (學生自填)

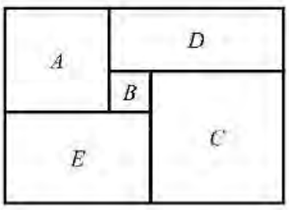
注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，分題 3 分，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案依序填寫在答案卷內。

問題一： 設 m 為實數。若方程式 $|x^2-10x|-2mx=1$ 有 4 個相異實根，則 m 的範圍為＿(一)＿。

問題二： 有一橢圓，其一頂點在 $(0,3)$，兩個焦點為 $F_1(-4,0)$ 與 $F_2(4,0)$。若 A 點的坐標為 $(1,1)$，P 為橢圓上的動點，則 $\overline{PA}+\overline{PF_2}$ 的最大值為＿(二)＿。

問題三： 如下圖，三個正方形 A,B,C 與兩個長方形 D,E 組成一個長 36、寬 20 的大矩形。若長方形 D 的面積為 115，則長方形 E 的面積為＿(三)＿。



< 背面尚有試題 >

問題四： 給定空間中四點 $A(2022,4044,2022)$, $B(1017,2022,1011)$, $C(2022,4035,2022)$, $O(0,0,0)$。已知平面 $x+2y+z=6$ 與平面 OCA 交於直線 L_1，又與平面 OAB 交於直線 L_2，且 L_1 與 L_2 有一夾角為 θ，則 $\sin\theta=$ ___**(四)**___ 。

問題五： 凸四邊形 $ABCD$ 中，點 E 與 F 分別為 $\triangle ABD$ 與 $\triangle BCD$ 的外心。若 $\overline{AE}=3$，$\overline{EF}=7$，且 $\overline{CF}=5$，則 $\overline{BD}$ 的長度為___**(五)**___ 。

問題六： 設 $\dfrac{\sqrt{2+2\cos x}}{2}-\sqrt{1-\sin x}=\dfrac{2}{5}$，其中 $0\le x\le\pi$，試問 $\sin x=$ ___**(六)**___ 。
(須求出所有可能的答案，只答一個不給分。)

問題七： 令矩陣 $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$，且 $0\le\theta<2\pi$。
若矩陣 $I+A+A^2+A^3+A^4+A^5$ 之行列式值為 1，
其中 $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，則 θ 的最大值為___**(七)**___ 。

< 試題結束 >

111 學年度新北市 (板橋高中)

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科口試試題

編號：____________ (學生自填)

注意事項：

1. 本口試卷共兩題，思考時間 15 分鐘；參賽者可先在計算紙上作答，口試答辯時間 15 分鐘，並繳回計算紙。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的細節。

問題一： 有一正實數數列 $\langle a_n \rangle$，已知 $a_1 = 1$，
且對每一個正整數 n，皆滿足 $a_{n+1}^2 + a_{n+1} < a_n$。
試證：對於每一個正整數 n，$a_n < \dfrac{2}{n}$ 皆成立。

問題二： $\triangle ABC$ 中，頂點 A, B, C 的對邊長度分別為 a, b, c，
令 $\angle B = x$。已知 a^2, b^2, c^2 為等差數列，且 x 的方程式
$\sqrt{3}\cos x + \sin x = k$ 有唯一解，試求 k 所有可能的值。

< 試題結束 >

111學年度北二區(新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(一)試題

編號：＿＿＿＿＿＿＿＿(學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為49分。
2. 考試時間：2小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一： 設 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，A',B',C' 分別為 $\triangle ABC$ 三頂點 A,B,C 對三邊 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 及 $\overline{AB}$ 的對稱點。且知 $\triangle ABB'$ 與 $\triangle ACC'$ 的外接圓交於 A、P 兩點，$\triangle BAA'$ 與 $\triangle BCC'$ 的外接圓交於 B、Q 兩點及 $\triangle CAA'$ 與 $\triangle CBB'$ 的外接圓交於 C、R 兩點。

(1) 設 X、Y 分別為 $\triangle ABB'$ 與 $\triangle ACC'$ 的外心，且 E、F 分別為 $\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 的中點。試證直線 XF 交直線 YE 於 O 點。

(4分)

(2) 承(1)小題，試證點 O 為 $\triangle AXY$ 的垂心。

(5分)

(3) 試證 $\overline{AP}$、$\overline{BQ}$ 及 $\overline{CR}$ 三線共點。

(7分)

問題二： 一共$n \geq 12$個人圍成一圈。已知在任一個人的左右兩側沿著圍著的圈各取五個人，則這十個人恰好男女各半。

(1) 證明$n = 12$時能滿足上述的圍圈方式。

(2 分)

(2) 將這n個人由某位開始，順時針編號為$1,2,3,4,\ldots$，並一直繼續編號下去(故編號$n+1$與第1號是同一個人，編號$n+2$與第2號是同一個人…以此類推)。對於$k \geq 1$，令a_k表示編號為$k, k+1, k+2, k+3, k+4$這五個人之中的男生個數。證明數列$\langle a_k \rangle_{k\geq 1} = a_1, a_2, a_3, \ldots$是一個週期12的數列。

(6 分)

(3) 證明n必為4的倍數。

(8 分)

問題三： 設數列$\langle a_n \rangle$為正實數數列(即$a_n > 0,\ n = 0,1,2,\cdots$)且滿足$a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1} + 1$ $(n \geq 1)$。

(1) 試證：若每個a_n都是正整數，則$\langle a_n \rangle$是嚴格遞增數列(即$a_{n+1} > a_n,\ n = 0,1,2,\cdots$)。

(6 分)

(2) 找出a_n都是正整數的充分必要條件。

(11 分)

111 學年度北二區(新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(二)試題

編號：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿(學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題3分，滿分為21分。
2. 考試時間：1小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算結果依序填寫在答案欄內。

問題：

1. 已知 $40^a=4$、$40^b=5$，試求 $8^{\frac{1-a-b}{2-2b}}=$ ＿＿(一)＿＿。

2. 已知 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 且 $\sin(\frac{\pi}{4}+2\alpha)\sin(\frac{\pi}{4}-2\alpha)=\frac{1}{4}$，則 $2\sin^2\alpha+\tan\alpha-\cot\alpha-1=$ ＿＿(二)＿＿。

3. 有一座金字塔，底面是邊長為 a 的正方形，四個側面是全等的等腰三角形，底邊都是 a。已知金字塔的頂點到底面的距離也是 a。設兩相鄰側面形成的兩面角為 θ，則 $\cos\theta=$ ＿＿(三)＿＿。

4. 設實數 x,y 滿足 $|x|+y=3$ 及 $|x|\cdot y+x^3=0$ 且 $x\neq 0$，求 $x+y=$ ＿＿(四)＿＿。

5. 在梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}/\!/\overline{CD}$。已知 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AD}=1, \overline{CD}=2$。若點 P 為 $\triangle BCD$ 內(包含邊界)的動點，則 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DB}$ 的取值範圍為 ＿＿(五)＿＿。

6. 設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 為三次實係數多項式函數，其中 a,b,c,d 為實數。已知 $f(x)$ 的圖形在 $x=1$ 處近似於直線 $y=\frac{3}{2}x$，在 $x=3$ 處近似於直線 $y=\frac{3}{2}x+2$。則 $(a,b,c,d)=$ ＿＿(六)＿＿。

7. 將7個黑點，13個白點排成一列，已知每一種排法出現的機率相同。今任選一種排法，令隨機變數 X 為黑點與白點相鄰的次數。例如若選出的排法為

○●●○○○●○●○○○●○●○○●○○

，則 $X=12$。試求出 X 的期望值為 ＿＿(七)＿＿。

111 學年度北二區(新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科口試試題

編號：＿＿＿＿＿＿＿＿＿(學生自填)

注意事項：

1. 本口試卷共兩題，思考時間15分鐘；參賽者可先在計算紙上作答，口試答辯時間12分鐘，並繳回計算紙。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的細節。

問題：

1. 已知 $f(x)$ 滿足
$$f(x)+f(\frac{x-1}{x})=x+1 \quad (x\neq 0,1)$$
，試求 $f(x)$。

2. 已知四邊形 $ABCD$ 內接於圓 O，$\overline{AB}$ 為直徑且 $\overline{AD}=\overline{DC}$，分別延長 $\overleftrightarrow{BA}$、$\overleftrightarrow{CD}$ 交於點 E。若 $\overline{AO}=\overline{AE}$ 且 $\overline{AB}=10$，試求 $\overline{AD}$ 的長。

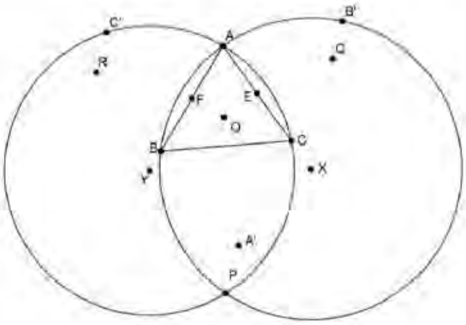
111 學年度北二區(新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
(數學科筆試一參考答案)

問題一： 設 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，A',B',C' 分別為 $\triangle ABC$ 三頂點 A,B,C 對三邊 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 及 $\overline{AB}$ 的對稱點。且知 $\triangle ABB'$ 與 $\triangle ACC'$ 的外接圓交於 A、P 兩點，$\triangle BAA'$ 與 $\triangle BCC'$ 的外接圓交於 B、Q 兩點及 $\triangle CAA'$ 與 $\triangle CBB'$ 的外接圓交於 C、R 兩點。

(1) 設 X、Y 分別為 $\triangle ABB'$ 與 $\triangle ACC'$ 的外心，且 E、F 分別為 $\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 的中點。試證直線 XF 交直線 YE 於 O 點。

(2) 承(1)小題，試證點 O 為 $\triangle AXY$ 的垂心。

(3) 試證 $\overline{AP}$、$\overline{BQ}$ 及 $\overline{CR}$ 三線共點。



證明(1)：

(1) 設 E,F 分別為 $\overline{AC},\overline{AB}$ 的中點，則 $\overline{OE}\perp\overline{AC}$。

(2) Y 為 $\triangle ACC'$ 的外心，故 $\overline{YE}\perp\overline{AC}$，因此 Y、O、E 共線。

(3) 同理 X、O、F 共線，故 $\overleftrightarrow{XF}$ 交 $\overleftrightarrow{YE}$ 於 O 點。

證明(2)：

(1) $\overline{BA}$ 垂直平分 $\overline{CC'}$ ($\overline{BA}$ 為 C,C' 的對稱軸)，且 $\overline{YA}$ 垂直平分 $\overline{CC'}$ (Y 為 $\triangle ACC'$ 的外心)，故 A,B,Y 三點共線。

(2) 同理 A,C,X 三點共線，且 $\overline{XF}\perp\overline{AB}$。

(3) $\overleftrightarrow{XF}$ 與 $\overleftrightarrow{YE}$ 交於 O 點，故 O 為 $\triangle AXY$ 的垂心。

證明(3)：

(1) $\triangle ABB'$ 與 $\triangle ACC'$ 外接圓交於 A、P，故 $\overline{AP} \perp \overline{XY}$。

(2) $\overline{AO} \perp \overline{XY}$，故 A,O,P 共線，亦即 $\overleftrightarrow{AP}$ 通過 O 點。

(3) 同理，$\overleftrightarrow{BQ}$ 及 $\overleftrightarrow{CR}$ 通過 O 點。

問題二： 一共$n\geq 12$個人圍成一圈。已知在任一個人的左右兩側沿著圍著的圈各取五個人，則這十個人恰好男女各半。

(1) 證明$n=12$時能滿足上述的圍圈方式。

(2) 將這n個人由某位開始，順時針編號為$1,2,3,4,\ldots$，並一直繼續編號下去(故編號$n+1$與第1號是同一個人，編號$n+2$與第2號是同一個人$\cdots$以此類推)。對於$k\geq 1$，令a_k表示編號為$k,k+1,k+2,k+3,k+4$這五個人之中的男生個數。證明數列$\langle a_k\rangle_{k\geq 1}=a_1,a_2,a_3,\ldots$是一個週期12的數列。

(3) 證明n必為4的倍數。

證明(1)：

構造：由一點鐘位置往右010101，由十二點鐘位置往左也010101。 □

證明(2)：由條件知$a_k+a_{k+6}=5$，故$a_{k+6}=5-a_k$。因此

$$a_{k+12}=5-a_{k+6}=a_k$$

因此a_k是週期12的數列。 □

證明(3)：由(2)我們有

$$a_{k+6m}=\begin{cases}a_k, & if\ m\equiv 0 \mod 2,\\ 5-a_k, & if\ m\equiv 1 \mod 2.\end{cases}$$

又因為n個人繞一圈，所以$a_k=a_{k+n}=a_{k+2n}=\cdots$。

若n為奇數，令$k=1,m=n$，得$a_1=a_{1+6n}=5-a_1$與a_1為整數矛盾，故n為偶數。

若$n\equiv 2 \mod 4$，則令$k=1$及$m=\ell=\frac{n}{2}$為奇數，故$a_{1+6\ell}=5-a_1$又$a_{1+6\ell}=a_{1+3n}=a_1$，兩式矛盾。

因此n為4的倍數。 □

問題三： 設數列 $\langle a_n\rangle$ 為正實數數列 (即 $a_n>0,\ n=0,1,2,\cdots$) 且滿足 $a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}+1$ $(n\geq 1)$。

(1) 試證：若每個 a_n 都是正整數，則 $\langle a_n\rangle$ 是嚴格遞增數列 (即 $a_{n+1}>a_n,\ n=0,1,2,\cdots$)。

(2) 找出 a_n 都是正整數的充分必要條件。

證明 (1)：由 $a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}+1$，兩邊同減 a_na_{n-1} 得

$$a_n(a_n-a_{n-1})-1=a_{n-1}(a_{n+1}-a_n) \tag{1}$$

特別地，當 $n=1$ 時有

$$a_1(a_1-a_0)-1=a_0(a_2-a_1) \tag{2}$$

先證 $a_1>a_0$：

若 $a_1\leq a_0$，則由 (2) 式得 $a_2<a_1$，再由 (1) 式得 $a_3<a_2,a_4<a_3,\cdots$

因此必有一項 $a_k\leq 0$，矛盾。

因為 a_0,a_1 都是正整數且 $a_0<a_1$，所以 $a_1(a_1-a_0)-1>0$。由 (2) 式得 $a_2>a_1$

同理，因為 a_n,a_{n-1} 都是正整數且 $a_n>a_{n-1}$，則由 (1) 式可知 $a_{n+1}>a_n$

由數學歸納法，得證 □

證明 (2)：

$$\frac{a_n^2+a_{n+1}^2-1}{a_na_{n-1}}=\frac{a_{n-1}a_{n-1}+a_{n+1}^2}{a_na_{n+1}}=\frac{a_{n-1}+a_{n-1}}{a_n}=\frac{a_{n-1}^2+a_{n-1}a_{n+1}}{a_{n-1}a_n}=\frac{a_{n-1}^2+a_n^2-1}{a_{n-1}a_n} \tag{3}$$

由 (3) 可知，對任意的 n，$\dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{a_n}$ 都是定值，記為 d。因此我們有

$$a_{n+1}=da_n-a_{n-1}\qquad n=1,2,3,\ldots \tag{4}$$

要證 a_n 都是正整數的充要條件為 a_0,a_1 及 d 都是正整數且 $a_1>a_0$

($\Leftarrow$) 由 (4) 式，所有 a_n 都是整數，再由題意 a_n 為正數，可知每個 a_n 是正整數。

$(\Rightarrow)$ 假設每個 a_n 都是正整數，由 (1) 小題知 $a_1 > a_0$

若 $d = \dfrac{a_1 + a_3}{a_2}$ 不是整數。因為 a_2, a_3 互質 (由 $a_2^2 - a_1a_3 = 1$)，則 da_3 不是整數

因此 $a_4 = da_3 - a_2$ 不是整數，矛盾。 $\square$

111學年度北二區(新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
(數學科筆試二參考答案)

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，滿分為21分。
2. 考試時間：1小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算結果依序填寫在答案欄內。

答　案　欄

(一)	(二)	(三)	(四)
$\sqrt{2}$	$\frac{5\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{5}$	$4-\sqrt{13}$
(五)	**(六)**	**(七)**	
$[\frac{-3}{2},\frac{3}{2}]$	$(\frac{-1}{2},3,-3,2)$	$\frac{91}{10}$	

111 學年度北二區 (新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
(數學科口試參考答案)

1. 已知 $f(x)$ 滿足

$$f(x)+f(\frac{x-1}{x})=x+1 \quad (x\neq 0,1)$$

，試求 $f(x)$。

【解】以 $\frac{t-1}{t}$ 代入原方程式得到

$$f(\frac{t-1}{t})+f(\frac{-1}{t-1})=\frac{2t-1}{t} \tag{5}$$

再以 $\frac{-1}{t-1}$ 代回原方程式得到

$$f(\frac{-1}{t-1})+f(t)=\frac{t-2}{t-1} \tag{6}$$

原方程式 $+(6)-(5)$ 式可以得到

$$2f(x)=x+1+\frac{x-2}{x-1}-\frac{2x-1}{x}=\frac{x^3-x^2-1}{x(x-1)}$$

故得到

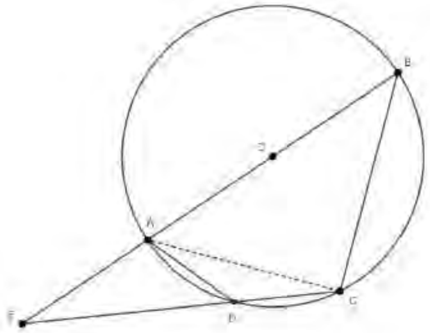
$$f(x)=\frac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)}$$

□

111 學年度北二區(新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
(數學科口試參考答案)

2. 已知四邊形 $ABCD$ 內接於圓 O，$\overline{AB}$ 為直徑且 $\overline{AD}=\overline{DC}$，分別延長 $\overleftrightarrow{BA}$、$\overleftrightarrow{CD}$ 交於點 E。若 $\overline{AO}=\overline{AE}$ 且 $\overline{AB}=10$，試求 $\overline{AD}$ 的長。

【解】



(1) 令 $\overline{AD}=\overline{DC}=x$，且 $\angle CAD=\angle DCA=\alpha$。

(2) 由正弦定理 $\dfrac{x}{\sin\alpha}=10\Rightarrow x=10\cdot\sin\alpha$。

(3) $\angle ABC=2\alpha$，故 $\angle AED=90^\circ-3\alpha$ 且 $\angle ADE=2\alpha$。

(4) 在 $\triangle ADE$ 中，$\dfrac{5}{\sin 2\alpha}=\dfrac{x}{\sin(90^\circ-3\alpha)}=\dfrac{10\cdot\sin\alpha}{\cos 3\alpha}$

得 $2\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha=\cos 3\alpha=\cos(\alpha+2\alpha)=\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha-\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha$

(5) 得 $3\tan\alpha\cdot\tan 2\alpha=1\Rightarrow 3\tan\alpha\cdot\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=1\Rightarrow 6\tan^2\alpha=1-\tan^2\alpha$

(6) 得 $\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{7}},\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{8}}$，所以 $\overline{AD}=10\cdot\dfrac{1}{\sqrt{8}}=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$。 □

111 學年度高級中學數學學科能力競賽

中投區複賽試題（一）

（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共五題**計算證明題**，滿分為 49 分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

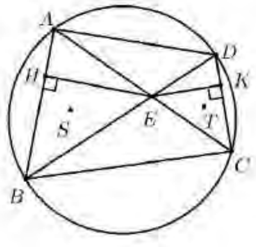
一、(9分) 在集合$\{1,2,\cdots\cdots,100\}$任意選3個不同的數字組合成一個三角形的三邊長，共有幾種選法？

二、(10分) 證明$C_1^{89}+C_2^{89}+\cdots+C_{59}^{89}$ 為89^2的倍數。

三、(10分) 令正整數$a_1,a_2,\cdots,a_{16},a_{17}$，滿足$a_1<a_2<\cdots<a_{16}<a_{17}$且$\sum_{i=1}^{17}a_i^2\le 3090$，求$a_{13}-a_8$的最大值。

四、(10分) 設$f(x)=\sin\frac{\pi x}{2}-1+\left|\frac{2x}{1011}-4\left[\frac{x}{2022}\right]-2\right|$，其中$[x]$表不大於$x$的最大整數。已知$f$為週期函數，令$T$表$f$的週期，$K$表$f(x)=0$在區間$[0,T]$中解的個數，求$K$。

五、(10分) 設$ABCD$為圓內接四邊形，點E是對角線$\overline{AC},\overline{BD}$的交點，自$E$至$\overline{AB},\overline{CD}$的垂線的垂足分別為$H,K$，$\Delta ABE,\Delta CDE$的外心分別為$S,T$. 證明：$S,T,H,K$共圓。



111學年度高級中學數學學科能力競賽

中投區複賽試題（二）（時間一小時）

注意事項：

1. 本試卷共七題**填充題**，每題 3 分，滿分為 21 分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、設 $a\ge 0, b\ge 0$，已知 $a^2+2b^2=1$，求 $a+b$ 的最大值與最小值之和。

二、設 a,b 為互質的正整數且都不小於 10，若 $7a+11b$ 為 13 的倍數，求 $a+b$ 的最小值。

三、數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1=\sqrt{2}+1,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{1-a_n},\ n=1,2,\cdots$。若從此數列中挑出100項，使其總和為 $90-20\sqrt{2}$，求此100項的乘積。

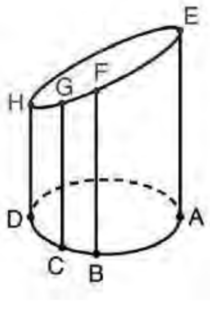
四、已知 $f(x)$ 滿足 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，且 $f(x)+f(y)=f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$.

設 $b_n=n^2+3n+1$，求 $f\left(\dfrac{1}{b_1}\right)+f\left(\dfrac{1}{b_2}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{1}{b_{2020}}\right)+f\left(\dfrac{1}{2022}\right)$.

五、設甲、乙兩個袋子分別有 2 黑 1 白和 2 白 1 黑各 3 顆球，每次操作會先從甲袋任選一球放入乙袋（此時有 4 顆球），再從乙袋任選一球放回甲袋。將上述操作完整作 2 次，求 3 顆黑球和 3 顆白球恰好分在兩袋的機率。

六、已知 E 是矩形 $ABCD$ 邊 $\overline{AD}$ 的中點，$\overline{BE}$ 和 $\overline{AC}$ 垂直於點 F，$\overline{AF}=2$，求 $\overline{DF}$.

七、將一底半徑為 5 的直圓柱，用一平面截過而得一頂面為橢圓的柱狀體(如圖所示)。設 E,F,G,H 為橢圓上的四點，其中 E,H 為長軸上的兩端點，A,B,C,D 分別為此四點在底圓的投影點。已知 B,C 在底圓的直徑 $\overline{AD}$ 的同側，且 $\overline{BC}=3, \overline{BF}=10, \overline{CG}=7$，求 $\overline{AE}+\overline{DH}$ 的最大值。



111 學年度高級中學數學學科能力競賽

彰雲嘉區複賽試題（一）　　編號：______

（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共五題**計算證明題**，滿分為四十九分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、已知 $f(x)=x^4-6x^3+11x^2-6x-1,\ g(x)=x^3-3x^2+2x+1$ 是兩個整數係數多項式，
(9 分)　假設 $a,\ b,\ c$ 是 $g(x)$ 的三個相異根，求 $\dfrac{f(c)}{f(a)f(b)}+\dfrac{f(a)}{f(b)f(c)}+\dfrac{f(b)}{f(c)f(a)}$.

二、設 $a_1=2,\ a_n=\dfrac{2}{3}a_{n-1}+\dfrac{7}{3a_{n-1}^2}$，其中 $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$.
(10 分)

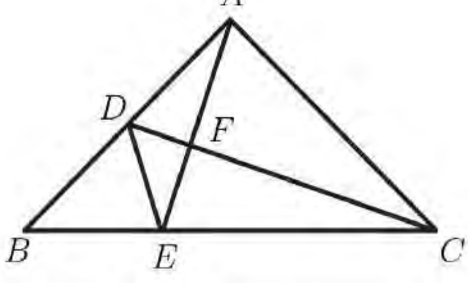
證明：(1) $\sqrt[3]{7}<a_n\le 2$，對所有 $n\ge 1$.

(2) $a_4-\sqrt[3]{7}<\dfrac{1}{5}10^{-9}$.

三、求所有整數 $x,\ y,\ z$ 滿足
(10 分)
$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x^3+y^3+z^3=88 \end{cases}$$

四、某人從數線上的原點出發(第 0 步)，每一步皆獨立且隨機地往左一單位或往
(10 分)　右一單位，每一步往左一單位的機率為 $1/3$、往右一單位的機率為 $2/3$，試算第 1 步至第 5 步之間曾經回到原點，且第 6 步位於數線-2 或 2 的機率。

五、如圖，等腰三角形 ΔABC 中，$\angle A=90°$，D
(10 分)　為 $\overline{AB}$ 的中點，線段 $\overline{BC}$ 上有一點 E 使得 $\overline{AE}\perp\overline{CD}$，而線段 $\overline{AE}$ 與 $\overline{CD}$ 交於 F。試證 $\angle ADC=\angle BDE$。



111 學年度高級中學數學學科能力競賽

彰雲嘉區複賽試題（二）　　**編號：_____**

（時間一小時）

注意事項：

1. 本試卷共七題**填充題**，每題 3 分，滿分為二十一分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、 若對每一個實數 x, $\log_{0.5}\dfrac{x^2+ax+2}{x^2-x+1}>\log_{0.5}3$ 恆成立。
求實數 a 的範圍________。

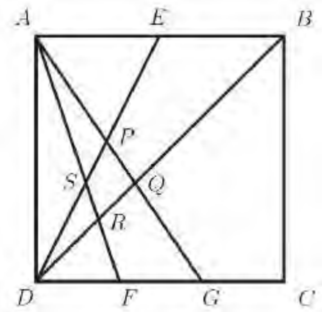
二、 在複數平面上，設 $D=\left\{z=a+bi:\ a,b\in\mathbb{R},\ a^2+b^2=1\right\}.$

求 $\left|z^2+z-6\right|$ 在 D 上之最大值為_______.

三、 有一組座標 $(a_n,\ b_n)$，其中 a_n 是正整數，$0<b_n<1$；若給定 $(a_1,\ b_1)$ 之後，下一個座標的規則如下：

$$a_{n+1}=\left[\frac{1}{b_n}\right],\ b_{n+1}=\frac{1}{b_n}-a_{n+1}$$，其中 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數。

若 $(a_1,\ b_1)=(1,\ 2-\sqrt{3})$, 試求出 $(a_{2022},\ b_{2022})=$________.



四、 如圖，有一個邊長為 6 的正方形 $ABCD$, 點 E 為 $\overline{AB}$ 的中點，點 F,G 為 $\overline{CD}$ 的三等分點。連接 $\overline{AF}$, $\overline{AG}$, $\overline{DE}$, $\overline{DB}$ 之後四直線圍出一個四邊形 $PQRS$, 試求四邊形 $PQRS$ 的面積為_______。

五、 求 $\sqrt[3]{1733.1}$ 之值為_______（四捨五入至小數點後第 3 位）。

六、 西夏國要徵駙馬，進入到最後冠軍戰，虛竹跟慕容復將進行最後的冠軍戰。決戰方式是由公主出一題猜謎，兩人答題分獨立兩處進行，因為虛竹看起來較笨，所以他要在三次以內答對公主的題目，慕容復則需要在兩次以內答對，才能成為駙馬。假設虛竹每次答對的機率是 $\dfrac{1}{9}$，則慕容復每次答對的機率至少要多少，他的當選機率會超過虛竹？ _______（答案請寫至小數點後第二位）。

七、 將1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8八個數字排成一個可以被 11 整除的八位數，共有 x 種排法。則 $x=$________.

111 學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題（一）【解答】

一、【解】

由除法原理 $f(x)=(x-3)g(x)+2-x$

知 $f(a)=2-a,\ f(b)=2-b,\ f(b)=2-c$

由根與係數 $g(x)=x^3-3x^2+2x+1=(x-a)(x-b)(x-c)$

知 $a+b+c=3,\quad ab+bc+ca=2,\ g(2)=(2-a)(2-b)(2-c)=1$

原式 $\dfrac{f(c)}{f(a)f(b)}+\dfrac{f(a)}{f(b)f(c)}+\dfrac{f(b)}{f(c)f(a)}$

$=\dfrac{f(c)^2+f(a)^2+f(b)^2}{f(a)f(b)f(c)}$

$=\dfrac{(2-a)^2+(2-b)^2+(2-c)^2}{(2-a)(2-b)(2-c)}=\dfrac{5}{1}=5$

因為 $(2-a)^2+(2-b)^2+(2-c)^2$

$=((2-a)+(2-b)+(2-c))^2-2((2-a)(2-b)+(2-b)(2-c)+(2-c)(2-a))$

$=(6-(a+b+c))^2-2(3\cdot 2^2-4(a+b+c)+(ab+bc+ca))$

$=(6-3)^2-2(3\cdot 2^2-4\cdot 3+2)=5$

二、【解】

(1)對於 $n=1$　不等式

$\sqrt[3]{7}<a_n\le 2\cdots(*)$

顯然成立。

假設 $n=k,$ 這不等式(*)成立。

當 $n=k+1,$ 現在利用算術平均數大於等於幾何平均數，得

$a_{k+1}=\dfrac{2}{3}a_k+\dfrac{7}{3a_k^2}=\dfrac{1}{3}(a_k+a_k+\dfrac{7}{a_k^2})\ge\sqrt[3]{7}$

因為 a_k 為有理數，所以 $a_{k+1}>\sqrt[3]{7}$

此外 $a_{k+1}=\dfrac{2}{3}a_k+\dfrac{7}{3a_k^2}<\dfrac{2}{3}a_k+\dfrac{a_k^3}{3a_k^2}=a_k\le 2$

由數學歸納法知 $\sqrt[3]{7}<a_n\le 2,$ 對所有 $n\ge 1.$

(2)令$\alpha=\sqrt[3]{7}$，則$\alpha^3=7$且

$$a_{n+1}-\alpha=\frac{2}{3}a_n+\frac{\alpha^3}{3a_n^2}-\alpha$$
$$=\frac{1}{3a_n^2}(2a_n^3-3\alpha a_n^2+\alpha^3)$$
$$=\frac{(2a_n+\alpha)}{3a_n^2}(a_n-\alpha)^2\le\frac{1}{a_n}(a_n-\alpha)^2\le\frac{1}{\alpha}(a_n-\alpha)^2$$

由於$a_1^3-\alpha^3=(a_1-\alpha)(a_1^2+a_1\alpha+\alpha^2)$

$$=(a_1-\alpha)(4+2\alpha+\alpha^2)\ge 10(a_1-\alpha)$$

知$a_1-\alpha\le\dfrac{1}{10}$,

所以

$$a_4-\alpha\le\frac{1}{\alpha}(a_3-\alpha)^2\le\frac{1}{\alpha^3}(a_2-\alpha)^4\le\frac{1}{\alpha^7}(a_1-\alpha)^8$$
$$\le\frac{1}{49\alpha}10^{-8}<\frac{1}{5}10^{-9}$$

三、【證明】

將$z=4-x-y$代入$x^3+y^3+z^3=88$

得$x^3+y^3+(4-x-y)^3=88$

展開上式得$x^3+y^3+64-48(x+y)+12(x+y)^2-(x+y)^3=88$

利用$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$代入上式再提出$x+y$項

得因式分解$(x+y)(4(x+y)-xy-16)=8$……………(1)

由對稱性可設$x\ge y\ge z$再由(1)式可知$x+y=1,2,4$或8

Case 1. $x+y=1$. 代入(1)式得$4-x(1-x)-16=8$

故$x^2-x-20=0$ 解得$x=5,-4$ 此時$x=5,y=-4$

代回得$x=5,y=-4,z=3$(不合)

Case 2. $x+y=2$. 代入(1)式得$8-x(1-x)-16=4$

故$x^2-2x-12=0$ 解得x無整數解

Case 3. $x+y=4$. 代入(1)式得$16-x(1-x)-16=2$

故$x^2-4x-2=0$ 解得x無整數解

Case 4. $x+y=8$. 代入(1)式得$32-x(1-x)-16=1$

故$x^2-8x+15=0$ 解得$x=5,3$ 此時$x=5,y=3$

代回得結論$x=5,y=3,z=-4$

因此x,y,z的所有整數解為

$(x,y,z)=(5,3,-4),(5,-4,3),(3,-4,5),(3,5,-4),(-4,5,3),(-4,3,5)$

四、【解】

(Method 1)

令第 k 步在數線上的位置為 x_k；每一步往右的機率為 p=2/3、往左的機率為 q=1-p=1/3。

因僅會在偶數步時回到原點，令事件 A 為($x_2=0$)、事件 B 為($x_4=0$)。

$$P\left\{[A\cup B]\cap\left[(x_6=-2)\cup(x_6=2)\right]\right\}=P\left\{(A\cup B)\cap(x_6=-2)\right\}+P\left\{(A\cup B)\cap(x_6=2)\right\}$$

$$=P\left\{\left[(A)\cup\left(A^c\cap B\right)\right]\cap(x_6=-2)\right\}+P\left\{\left[(A)\cup\left(A^c\cap B\right)\right]\cap(x_6=2)\right\}$$

$$=P\left\{A\cap(x_6=-2)\right\}+P\left\{\left(A^c\cap B\right)\cap(x_6=-2)\right\}+P\left\{A\cap(x_6=2)\right\}+P\left\{\left(A^c\cap B\right)\cap(x_6=2)\right\}$$

$$\begin{aligned}&=P(A)\times P\left(x_6=-2\middle|A\right)+P\left(A^c\cap B\right)\times P\left(x_6=-2\middle|A^c\cap B\right)\\&\quad+P(A)\times P\left(x_6=2\middle|A\right)+P\left(A^c\cap B\right)\times P\left(x_6=2\middle|A^c\cap B\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=P(A)\times P\left(x_6=-2\middle|A\right)+\left[P(B)-P(A\cap B)\right]\times P\left(x_6=-2\middle|A^c\cap B\right)\\&\quad+P(A)\times P\left(x_6=2\middle|A\right)+\left[P(B)-P(A\cap B)\right]\times P\left(x_6=2\middle|A^c\cap B\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\left(\frac{2!}{1!1!}\right)pq\times\left(C_1^4p^1q^3\right)+\left(\frac{4!}{2!2!}-\frac{2!}{1!1!}\times\frac{2!}{1!1!}\right)p^2q^2\times\left(C_0^2p^0q^2\right)\\&\quad+\left(\frac{2!}{1!1!}\right)pq\times\left(C_3^4p^3q^1\right)+\left(\frac{4!}{2!2!}-\frac{2!}{1!1!}\times\frac{2!}{1!1!}\right)p^2q^2\times\left(C_2^2p^2q^0\right)\end{aligned}$$

$$=10p^2q^4+10p^4q^2=10\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^4+\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)=\frac{200}{729}$$

(Method 2)

假設 x 座標代表到達的位置，y 座標代表走的步數；每一步往右的機率為 p、往左的機率為 q。

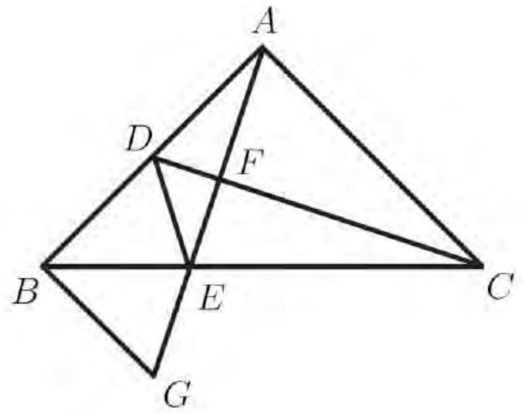
- 假設第一步走到(1,1)，則前五步一定要碰到 y 軸(x=0)，第六步要走到(2,6)的路徑，一定有一條從 (-1,1)走到(2,6)的路徑與之對應，所以可能的路徑數為 C_2^5，也就是往右走 4 步，往左走 2 步。每一個路徑發生的機率為 p^4q^2，所以這種情況之下的機率為 $C_2^5p^4q^2$。
- 假設第一步走到(-1,1)，則前五步一定要碰到 y 軸(x=0)，第六步要走到(-2,6)的路徑數，根據反射原理，等於第一步走到(1,1)，第六步要走到(-2,6)的路徑數，亦為 C_2^5，即必須要往右走 2 步，往左走 4 步，每一個路徑發生的機率為 p^2q^4，所以這種情況之下的機率為 $C_2^5p^2q^4$。

所以滿足題意的機率為 $C^5_2 p^4 q^2 + C^5_2 p^2 q^4 = 10\left(\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^4\right) = \frac{200}{729}$

五、【證明】

如右圖所示，將 $\overline{AE}$ 延長，並在 $\overline{AE}$ 的延長線上

找一點 G 使得 $\overline{GB} \perp \overline{AB}$.



考慮：ΔCAD 與 ΔABG, 因為

$\angle CAD = \angle ABG = 90°$, 而 $\overline{CA} = \overline{AB}$($\Delta ABC$ 為等腰三角形)，又

$\angle FAC + \angle ACD = 90° = \angle FAC + \angle BAG$, 得到

$\angle ACD = \angle BAG.$

因此 $\Delta CAD \cong \Delta ABG$($ASA$ 全等)，於是

$\overline{BG} = \overline{AD} = \overline{BD}$, 且 $\angle BGA = \angle ADC.$

再看 ΔDBE 與 ΔGBE ，因為 $\overline{BD} = \overline{BG}$, $\angle DBE = \angle GBE = 45°$, 且 $\overline{BE} = \overline{BE}$,

所以 $\Delta DBE \cong \Delta GBE$($ASA$ 全等)，於是

$$\angle BDE = \angle BGE = \angle BGA = \angle ADC.$$

111 學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題（二）【解答】

一、【解】

（i）真數 $\dfrac{x^2+ax+2}{x^2-x+1}>0$ 恆成立，但 $x^2-x+1>0$ 恆真

$\therefore x^2+ax+2>0$ 恆成立 $\Rightarrow$ 判別式 $D=a^2-8<0$

$\therefore -2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$ ……(1)

（ii）不等式 $\log_{0.5}\dfrac{x^2+ax+2}{x^2-x+1}>\log_{0.5}3$ 恆成立

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+ax+2}{x^2-x+1}<3$ 恆成立 $\Leftrightarrow 3(x^2-x+1)>x^2+ax+2$ 恆成立

$\Leftrightarrow 2x^2-(3+a)x+1>0$ 恆成立 $\Rightarrow$ 判別式 $(3+a)^2-8<0$

$\Leftrightarrow -3-2\sqrt{2}<a<-3+2\sqrt{2}$ ……(2)

取(1)(2)交集得 $-2\sqrt{2}<a<-3+2\sqrt{2}$

二、【解】

令 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ 考慮

$|z^2+z-6|^2=|z+3|^2|z-2|^2$,

$|z+3|^2=(\cos\theta+3)^2+\sin^2\theta=10+6\cos\theta,$

$|z-2|^2=(\cos\theta-2)^2+\sin^2\theta=5-4\cos\theta$

因此 $|z+3|^2|z-2|^2=(10+6\cos\theta)(5-4\cos\theta)$

$$=-24\cos^2\theta-10\cos\theta+50$$

$$=-24(\cos\theta+\frac{5}{24})^2+50+\frac{25}{24}$$

當 $\cos\theta=-\dfrac{5}{24}$ 時，$|z+3|^2|z-2|^2$ 有最大值 $50+\dfrac{25}{24}=\dfrac{1225}{24}$

因此 $\max\limits_{z\in D}|z^2+z-6|=\sqrt{\dfrac{1225}{24}}=\dfrac{35}{2\sqrt{6}}=\dfrac{35}{12}\sqrt{6}$

三、【解】

$\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$，可求得$(a_2,\ b_2)=(3,\ \sqrt{3}-1)$

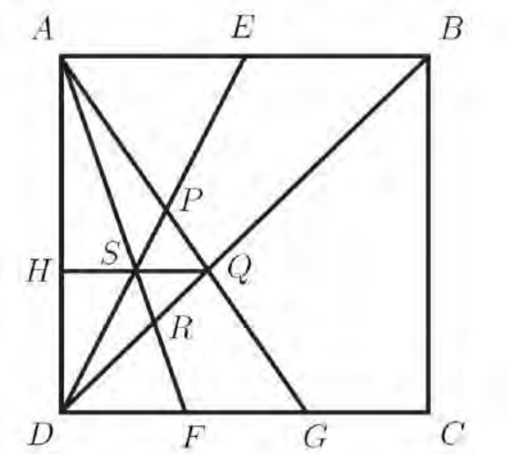
$\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{3})$，可求得$(a_3,\ b_3)=(1,\ \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1))$

$\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$，可求得$(a_4,\ b_4)=(2,\ \sqrt{3}-1)$

$$(a_5,\ b_5)=(1,\ \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1))$$

可推論$(a_{2022},\ b_{2022})=(2,\sqrt{3}-1)$

四、【解】



如右圖，連接$\overline{SQ}$，並將它延長至與$\overline{AD}$相交為H.

可證$\overline{HQ}$與$\overline{AB}$還有$\overline{CD}$平行。

(A)假設$\overline{HS}=\overline{SQ}=x,\ \overline{AH}=y,\ \overline{HD}=6-y.$

利用$\Delta AHS\sim\Delta ADF$(AA相似)得到$\dfrac{y}{x}=\dfrac{6}{2}$,

由$\Delta DHS\sim\Delta DAE$(AA相似)得到$\dfrac{6-y}{x}=\dfrac{6}{3}$,

於是$6x=2y=3(6-y)$ 解得

$\overline{AH}=y=\dfrac{18}{5},\overline{HD}=6-y=\dfrac{12}{5}$，以及$x=\overline{HS}=\overline{SQ}=\dfrac{6}{5}.$

(B)梯形$SQGD$ 的面積為$\dfrac{(\frac{6}{5}+4)\frac{12}{5}}{2}=\dfrac{156}{25}$;

而梯形$QSAB$ 的面積為$\dfrac{(\frac{6}{5}+6)\frac{18}{5}}{2}=\dfrac{324}{25}.$

(C)假設ΔPSQ的面積為A_1利用$\Delta PSQ\sim\Delta PDG$(AA相似)得到

$$\frac{A_1}{A_1+\frac{156}{25}}=\frac{(\frac{6}{5})^2}{4^2}\Rightarrow A_1=\frac{108}{175}.$$

(D)假設ΔRSQ的面積為A_2利用$\Delta RSQ\sim\Delta RAB$(AA相似)得到

$$\frac{A_2}{A_2+\frac{324}{25}}=\frac{(\frac{6}{5})^2}{6^2}\Rightarrow A_2=\frac{27}{50}.$$

(E)因此 $PQRS$ 面積為 $A_1+A_2=\dfrac{81}{70}$.

五、【解】

解: 首先， $12^3=1728$.

令 $\sqrt[3]{1733.1}=12+a,\ \ a>0.$

則 $1733.1=(12+a)^3=1728+3\times144a+3\times12a^2+a^3$ ，

$\therefore\quad 5.1=f(a),$ 其中 $f(a)=432a+36a^2+a^3.$

因為 $f(0.012)>5.1$ 且 $f(0.0115)<5.1$

所以 $a\approx0.012$, $\sqrt[3]{1733.1}$ 約為 12.012。

六、【解】

虛竹成為駙馬的機率為 $\dfrac{1}{9}+\dfrac{8}{9}\times\dfrac{1}{9}+\left(\dfrac{8}{9}\right)^2\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{217}{729}.$

假設慕容復每次答對的機率為 p ，則他成為駙馬爺的機率為 $p+(1-p)p$.

所以 $p+(1-p)p>\dfrac{217}{729}$

⇨ $729p^2-1458p+217<0$

⇨ $0.1619<p<1.8381$

因此，慕容復每次答對的機率至少要 0.17，他當選的機率才會超過虛竹。

七、【解】

若 $abcdefgh$ 被 11 整除，$\{a,b,c,d,e,f,g,h\}=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

由 $10=-1(\text{mod}11), 10^k=(-1)^k(\text{mod}11)$,

得 $a+c+e+g-(b+d+f+h)\equiv 0(\text{mod}11)$

所以 $(a+c+e+g)-(b+d+f+h)=11k$ －(1)

$(a+c+e+g)-(b+d+f+h)=\sum_{i=1}^{8} i=36$ －(2)

由(2)知：$a+c+e+g,\ b+d+f+h$ 同奇，同偶

由(1)知：$(a+c+e+g)-(b+d+f+h)=0\ or\ 22$ －(3)

解(2)(3)得 $a+c+e+g=b+d+f+h=18$

考慮分解有 8 的計有 1278 (配 3456),

1368 (配 2457),

1467 (配 2358),

1458 (配 2367).

所以 $\{a,c,e,g\}$ 有 8 種可能。

因此共計有 $8\cdot 4!\cdot 4!=8\cdot 24\cdot 24=4608$

111 學年度台南區高級中學數學科能力競賽試題（一）

注意事項：

(1) 作答時間：2 小時。不可使用電算器。

(2) 本試卷共四題，滿分 49 分，第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分。

(3) 須將計算及證明過程依序寫在答案卷上。

(4) 試題紙及計算紙必須連同答案卷一併繳回。

(5) 需使用黑色或藍色筆作答

一、 若 a、b、c、d、e 均是正數，滿足 $abcde=1$，試證明

$$\frac{a^2+1}{a+1}+\frac{b^2+1}{b+1}+\frac{c^2+1}{c+1}+\frac{d^2+1}{d+1}+\frac{e^2+1}{e+1}\geq 5$$

二、在 ΔABC 中，$\angle A$ 與 $\angle B$ 皆為銳角，如果 $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin C$，試求 $\angle C$ 的度數。

三、 已知 $x\leq 0$ 且 $x^2+(y-2)^2=1$，試求 $\dfrac{3x^2-2\sqrt{3}\,xy+5y^2}{x^2+y^2}$ 的最大值及最小值。

四、 已知 a,b,c 為 $x^3+3x^2-2x-1=0$ 的三個解，試證:

$$\frac{a^{111}+b^{111}}{a+b}+\frac{b^{111}+c^{111}}{b+c}+\frac{a^{111}+c^{111}}{a+c}$$ 必為一個整數。

111 學年度台南區高級中學數學科能力競賽試題（二）

注意事項：

(1)作答時間：1 小時。不可使用電算器。

(2)本試卷共六題填充題，前三題每題 3 分，後三題每題 4 分，滿分 21 分。

(3)請將答案及演算結果依序寫在答案卷上。

(4)試題紙與計算紙必須連同答案卷一併繳回。

(5)需使用黑色或藍色筆作答

一、已知方程式 $x^3+5x^2+7x+13=0$ 的解為 a,b,c，且方程式 $x^3+rx^2+sx+t=0$的解是$a+b,\ b+c,\ c+a$，則 $r+2s+3t$之值為________。

二、試求 $2\log\sin 18^\circ+\log(1+\sin 18^\circ)$ 之值為________。

三、已知ΔABC中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，且$\angle B$的角平分線交$\overline{AC}$於$D$點，且$\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{AD}$，$\angle A$的度數為________。

四、若$x\geq 1, y\geq 1$, 且 $(\log x)^2+(\log y)^2=\log(10x^4)+\log(10y^4)$，則 $\log(xy)$的最大值為__________及最小值為__________。

五、設x,y為介於 -1 和 1 之間的實數，如果$x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}=1$，則 x^2+y^2+7 之值為____________。

六、令$d(n)$代表正整數n所有正因數的和，例如$d(12)=1+2+3+4+6+12=28$，則滿足$d(n)=120$的所有n值為__________。

【口試題】令Q^+為正有理數集，已知函數$f: Q^+ \to Q^+$且有$f\left(xf(y)\right) = \frac{f(x)}{y^3}$。

若 $f(3) = a$且$f(7) = b$，試求$f(189)$之值。

【口試題】對任意自然數 k，令 $a_k = 1 + \dfrac{1}{k^2}$ 。試證明:

$$\prod_{k=1}^{2022} a_k = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_{2021} \times a_{2022} < 4$$ 。

111 學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（高雄區）　筆試（一）　編號：________________

注意事項：

(1)時間分配：2 小時

(2)本試卷共四題，滿分 49 分。第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題、答案卷及計算紙須一同繳回。

一、設整數 a 使得方程式 $2a-\sqrt{ax(ax+\sqrt{8})+2}=\sqrt{66-8\sqrt{8}}$ 有整數解，求 a 的所有可能值為何?

二、設 $x^2+2x-2=0$ 的二根也為 $x^4-2ax^2+b=0$ 的根。求 a，b 之值為何？

三、將 1, 2, 3, …, 100 排成一排，使得每個數都嚴格大於排在他前面的任何數，或是嚴格小於排在他前面的任何數(例如:將 1, 2, 3 排成一排為 (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 2, 1), …)。請問有多少種排列方式?

(給予的答案須予以證明)

四、求最小的正整數 n $(n>24)$，使得 $\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n+1}$ 為完全平方數。

111 學年度高級中學數學科能力競賽複賽答案卷(試題)

南區（高雄區）　　筆試（二）　　編號：_______________

注意事項：

(1)時間分配：1 小時

(2)本試卷共 7 題，每題 3 分滿分 21 分。

(3)不可使用電算器。

(4)將答案填入前面之答案欄內。

(5)答案卷(試題)及計算紙須一同繳回。

填充題答案欄:

1.______________　　2._________________　　3._____________

4.______________　　5.__________________　　6.______________

7.______________

1. 已知$f(x)=x^2+(\log a+3)x+\log b$， $f(-1)=-3$，若對所有實數 x，$f(x)\geq 3x$ 均成立，求 $a+b=$______________

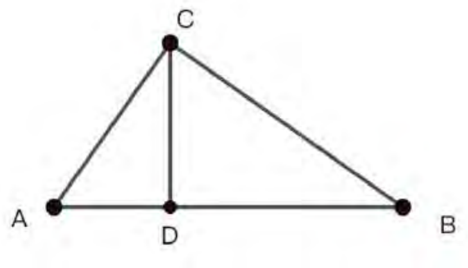
2. 設 a,b 均為實數，已知 $(x^3+2x^2+ax-5)(x^3-a^2x+2)(2x^2+b)=a_8x^8+a_7x^7+a_6x^6+\cdots+a_1x+a_0$，且 $a_8+a_6+a_4+a_4+a_0=a_7+a_5+a_3+a_1$，求 a，b 之值為______________________

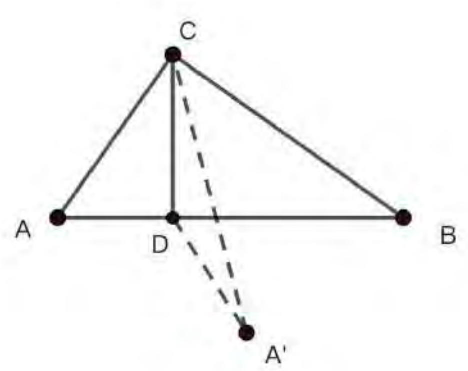
3. 已知 $a^2-b^2=6$，$(a-b)^2=4$，求 $a^2+b^2=$ ________________

4. 求 $\frac{x^4-3x^2+5}{(x^2-1)^2}$ $(x\neq\pm1)$的最小值為_________________

5. a,b,c,d,e,f,g 為連續且遞增的正奇數，已知$a+b+c+d+e+f+g$ 為完全平方數，$b+c+d+e+f$ 為完全立方數，求a 的最小值為_________________

6.如左圖，有一個直角三角形紙片 ABC，角 ACB 為直角。在 AB 邊上取一點 D 使得 CD 為 AB 邊上的高，且 $BD=2AD$。如右圖，將紙片沿著 CD 邊折起，讓兩個面夾 60 度。此時三角型紙片上點 A 的位置為A'，令角$A'CB=\alpha$，則$\cos\alpha$ = ___________





7. 設 a,b,c,d 為正整數，且滿足$a^5=b^2$, $c^4=d^7$ 及 $d-a=31$，求 $c-a=$___________

111 學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

第 5 區(屏東高中) 筆試(一) 編號: ______________________

注意事項:

(1)時間分配:2 小時

(2)本試卷共四題, 滿分 49 分第一題 12 分, 第二題 12 分, 第三題 12 分, 第四題 13 分

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

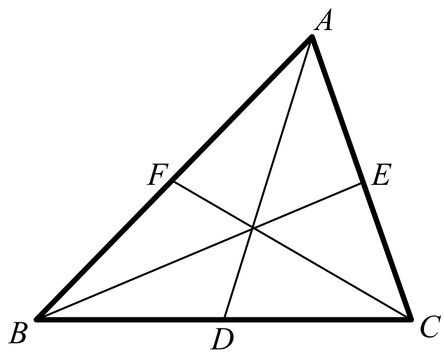
(5)試題與答案卷一同繳回。

一、令 $w+2x+3y+4z\geq 30$,試證 $\log(w^2+x^2+y^2+z^2)\geq \log 3+\log 10$

二、(1) 在平面上找六個點,使得可以用這六個點連出 11 條平行 X 軸、垂直 X 軸、斜率為 1 或−1 的直線。

(2) 證明無法在平面上找六個點,使得可以用這六個點連出至少 12 條平行 X 軸、垂直 X 軸、斜率為 1 或−1 的直線。

三、如下圖所示,$\triangle ABC$ 的三條中線分別為 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$。 若 $\triangle ABC$ 的面積為 1 則以 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 的長度為三邊長的三角形的面積等於 __________。



四、矩陣運算規則$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}p & q\\ r & s\end{bmatrix}$,$A+B=\begin{bmatrix}a+p & b+q\\ c+r & d+s\end{bmatrix}$,$AB=$

$\begin{bmatrix}ap+br & aq+bs\\ cp+dr & cq+ds\end{bmatrix}$

設 $A=\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$。

(1) 若 $A^3=aI_2$,其中 a 為實數且 $I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$,則 $a=$ ____________ 。

(2) $A+A^4+A^7+\cdots\cdots+A^{100}=$ ______________________ 。

111 學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

第 5 區(屏東高中) 筆試(二) 編號: ____________________

注意事項:

(1)時間分配 1 小時

(2)本試卷共四題, 滿分 21 分第一題 5 分, 第二題 5 分, 第三題 5 分, 第四題 6 分

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

五、題組

(1) 證明無法將一個正三角形分割為 2、3 或 5 個正三角形。

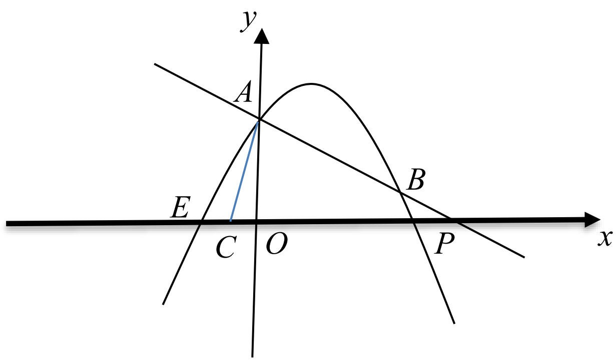
(2) 設n為正整數。證明若$n=4$或$n\geq 6$，則可將一個正三角形分割為n個正三角形。

六、如下圖，在平面直角坐標系中，直線 $y=-\frac{1}{3}x+2$ 交 x軸於點P，交 y軸於點A。

抛物線 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 的圖形通過點$E(-1,0)$，並與直線相交於A、B兩點。

(1) 求抛物線的方程式;

(2) 若點M在坐標軸(x 軸 或 y 軸)上使得 $\overline{AM}\perp\overline{BM}$，試求點$M$的座標。



七、令 n 為任意大於1的整數，T為所有n^2的因數和，k為n^2的因數的個數，試證 $T>kn$。

八、令 a,b,c,d 為正實數且 $a^2+b^2+c^2+d^2=4$，試證

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+cd}+\frac{1}{1+da}\geq 2$$

【口試題】

問題：已知$6! = 8 \times 9 \times 10$，試求出所有的正整數$n$，使得$n!$能表示為$n-3$個連續正整數之乘積。

【口試題】

a）令 $a \ge 0, b \ge 0$ ，試證 $ab \le (\frac{a+b}{2})^2$

b）令 $a \ge 0, b \ge 0, c \ge 0, d \ge 0$ ，試證 $abcd \le (\frac{a+b+c+d}{4})^4$

c）令 $a \ge 0, b \ge 0, c \ge 0, d \ge 0$ 且 $a+b+c+d=1$ ，試證 $3abcd \le ab+bc+cd+da$