

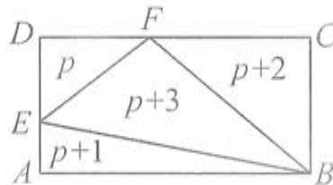
TRML 團體賽-2025

1. 某校 300 名學生參加英語檢定考試，統計結果人數如下表所示：

	通過	未通過	合計
男生	150	30	180
女生	a	b	120
合計	c	d	300

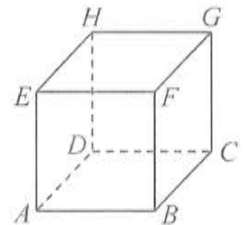
若該校英語檢定通過率與性別無關，則 $b \times c =$ _____。

2. 將多項式 $1 + (1+x) + (1+x^2)^2 + (1+x^3)^3 + (1+x^4)^4 + (1+x^5)^5 + (1+x^6)^6$ 展開後 x^6 項的係數為 _____。
3. 已知 $x^3 - 2x^2 + ax + b = 0$ 與 $x^3 - 2x^2 + cx + e = 0$ 的六個實根與某實數 α 可排成一個共七項且首項為 $\frac{1}{2}$ 的等差數列 $\langle a_n \rangle$ ，則 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7$ 的最大值為 _____。
4. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC} = 6$ 且 $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{3}{5}$ ，則 $\triangle ABC$ 面積的最大值為 _____。
5. 在坐標平面上，假設通過二點 $(1, 3)$ 、 $(5, -13)$ 的拋物線 $C: y = ax^2 + bx + c$ 與 x 軸的兩個交點為 P 、 Q 。若拋物線 C 與直線 $L: 2x + y = 6$ 相切於點 R ，則 $\triangle PQR$ 面積的最大值為 _____。
6. 如圖，矩形 $ABCD$ 的內部被三條線段分割成四個三角形，若其面積分別為 $p, p+1, p+2, p+3$ ，則 p 之值為 _____。



7. 若正三角形 ABC 的頂點 A, B, C 分別在半徑為 $\sqrt{3}, 2, \sqrt{7}$ 的同心圓上，則此正三角形邊長為 _____。

8. 如圖，長方體 $ABCD-EFGH$ 中，向量 $\overrightarrow{AG} = (3, 4, 5)$ ，且平面 $ABGH$ 與平面 $CDEF$ 交於一直線 L ，其方向向量為 $(1, 2, 2)$ ，則內積 $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH} =$ _____。

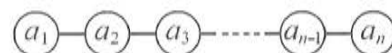


9. 設 a, p 為正整數，其中 $p > 2$ 為質數，且滿足 $160p + 1 = a^4$ ，則 p 之值為 _____。
10. 甲、乙、丙三個箱子內分別裝有 a, b, c 顆球，若 a, b, c 中恰有一數是 3 的倍數，則取出該箱子的球並平分成 3 等份，再放入各箱子一份，此過程稱為一次變換。例如： $a = 3k$ 時，一次變換後甲、乙、丙箱子內的球數分別為 $k, b+k, c+k$ 顆。若甲、乙、丙箱子內一開始分別裝有 a, b, c 顆球，經過 101 次變換後箱子內分別有 2, 3, 4 顆球，則以 a, b, c 分別為百位數、十位數、個位數的三位數為 _____。

2025 TRML 思考賽

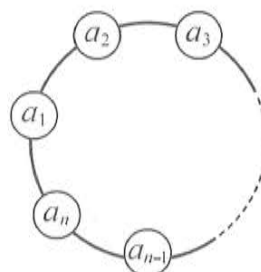
思考賽共 10 題，每題均為 6 分。答題時必須寫明計算或證明過程，為得到滿分，答題方式必須合理，層次清楚簡明。前面小題縱使未被證出，也可被引用來解後面小題；但後面小題的結果，未正確證明之前，不可用來解前面小題。繳交的答案紙每張至多一小題，且必須在每張答案紙上方標明題號且依序排列。每張紙上只寫一面，不要寫兩面。准考編號已由大會直接印於答案紙上，在繳交的答案卷上，不可用其他方式表明隊伍的身份。

如圖一，在 n 個點的路徑圖中，對每個 $i=1,2,\dots,n$ ，第 i 點標示一個 0 或 1 的數 a_i ，稱為一個 n 字元的直線數串 $a_1a_2\cdots a_n$ 。如圖



圖一

二，在 n 個點的迴圈圖中，對每個 $i=1,2,\dots,n$ ，將第 i 點標示一個 0 或 1 的數 a_i ，稱為一個 n 字元的環狀數串 $a_1a_2\cdots a_n$ ，其首尾兩個字元 a_1, a_n 視為相鄰，所以等同寫為 $a_2a_3\cdots a_na_1$ 或 $a_3a_4\cdots a_na_1a_2$ 等表示法。



圖二

在一個直線/環狀數串 $a_1a_2\cdots a_n$ 中，將某一點的值 a_i 換成此點所有相鄰點的值之和，其他各點的值不變，我們稱這樣的變換為一次操作；

其中的加法的運算規則為： $1+1=0+0=0$ 而 $1+0=0+1=1$ 。例

如：圖一中若選取 a_1 而 $n\geq 2$ ，則將 a_1 換成 a_2 ；若選取 a_2 而 $n\geq 3$ ，則將 a_2 換成 a_1+a_3 ；若選取 a_n 而 $n\geq 2$ ，則將 a_n 換成 a_{n-1} 。圖二中若選取 a_1 而 $n\geq 3$ ，則將 a_1 換成 a_n+a_2 。

直線數串 11111 經過 5 次操作後，可變成各字元均為 0 的直線數串 00000，如下所示：

$$\overset{1}{1}1111 \xrightarrow{1} 10\overset{1}{1}1 \xrightarrow{2} \overset{1}{1}0101 \xrightarrow{3} 00\overset{1}{1}01 \xrightarrow{4} 0000\overset{1}{1} \xrightarrow{5} 00000。$$

(其中上方有標記的數字就是進行操作的點)

這種經過某種有限次的操作後，可變成各字元均為 0 的數串稱為好數串。同樣的，環狀數串

11111 經過 7 次操作後，也可變成各字元均為 0 的數串，如下所示：

$$\overset{1}{1}1111 \xrightarrow{1} 10\overset{1}{1}11 \xrightarrow{2} 10\overset{1}{1}01 \xrightarrow{3} \overset{1}{1}0001 \xrightarrow{4} \overset{1}{1}1001 \xrightarrow{5} 0\overset{1}{1}001 \xrightarrow{6} 0000\overset{1}{1} \xrightarrow{7} 00000$$

所以，環狀數串 11111 也是好數串。但 5 字元的直線數串 11011 就不是一個好數串，因為每次操作後數串都不變，故無法經過有限次的操作，將其變成各字元均為 0 的數串。類似地，6 字元的環狀數串 011011 無法經過有限次的操作，將其變成各字元均為 0 的數串，所以它也不是一個好數串。

試依序回答下列問題。

- (1) 試說明：每一個 3 字元的直線數串都是好數串。
- (2) 試說明：每一個 4 字元的環狀數串都是好數串。
- (3) 有一個 8 字元直線數串 11111111，小明將它操作兩次如下：

$$\overset{1}{1}1111111 \xrightarrow{1} 110\overset{1}{1}1111 \xrightarrow{2} 11011011，$$

發現繼續操作，數串都不會改變，因此，他推論原來的數串 11111111 不是好數串。試

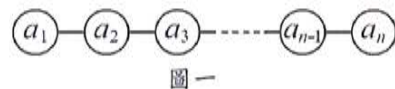
問：小明的推論是否正確？並請說明理由。

- (4) 試問：是否每一個 7 字元的直線數串都是好數串？並請說明理由。
- (5) 試問：是否每一個 8 字元的環狀數串都是好數串？並請說明理由。
- (6) 試利用數學歸納法證明：若 $a_1 = 0$ 或 $a_n = 0$ ，則直線數串 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 都是好數串。
- (7) 試證：若在直線數串 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 中，有某一個 i 使得連續 2 字元 $a_i a_{i+1} = 00$ 或連續 3 字元 $a_i a_{i+1} a_{i+2} = 010$ 或 $a_i a_{i+1} a_{i+2} = 111$ ，則直線數串 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 都是好數串。
- (8) 試證：當 $n = 3k + 1 \geq 4$ (k 為正整數) 時，每一個 n 字元的直線數串都是好數串。
- (9) 試證：當 $n = 3k + 2 \geq 2$ (k 為非負整數) 時，恰有一個 n 字元的直線數串不是好數串。
- (10) 試問：當 $n = 3k \geq 3$ (k 為正整數) 時，是否每一個 n 字元的環狀數串都是好數串？如果是，請證明；如果不是，請找出所有的非好數串，並請說明理由。

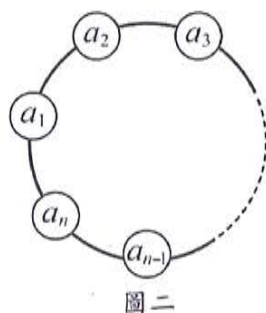
2025 TRML 思考賽

思考賽共 10 題，每題均為 6 分。答題時必須寫明計算或證明過程，為得到滿分，答題方式必須合理，層次清楚簡明。前面小題縱使未被證出，也可被引用來解後面小題；但後面小題的結果，未正確證明之前，不可用來解前面小題。繳交的答案紙每張至多一小題，且必須在每張答案紙上方標明題號且依序排列。每張紙上只寫一面，不要寫兩面。准考編號已由大會直接印於答案紙上，在繳交的答案卷上，不可用其他方式表明隊伍的身份。

如圖一，在 n 個點的路徑圖中，對每個 $i=1,2,\dots,n$ ，第 i 點標示一個 0 或 1 的數 a_i ，稱為一個 n 字元的直線數串 $a_1a_2\cdots a_n$ 。如圖



二，在 n 個點的迴圈圖中，對每個 $i=1,2,\dots,n$ ，將第 i 點標示一個 0 或 1 的數 a_i ，稱為一個 n 字元的環狀數串 $a_1a_2\cdots a_n$ ，其首尾兩個字元 a_1, a_n 視為相鄰，所以等同寫為 $a_2a_3\cdots a_na_1$ 或 $a_3a_4\cdots a_na_1a_2$ 等表示法。



在一個直線/環狀數串 $a_1a_2\cdots a_n$ 中，將某一點的值 a_i 換成此點所有相鄰點的值之和，其他各點的值不變，我們稱這樣的變換為一次操作；其中的加法的運算規則為： $1+1=0+0=0$ 而 $1+0=0+1=1$ 。例

如：圖一中若選取 a_1 而 $n\geq 2$ ，則將 a_1 換成 a_2 ；若選取 a_2 而 $n\geq 3$ ，則將 a_2 換成 a_1+a_3 ；若選取 a_n 而 $n\geq 2$ ，則將 a_n 換成 a_{n-1} 。圖二中若選取 a_1 而 $n\geq 3$ ，則將 a_1 換成 a_n+a_2 。

直線數串 11111 經過 5 次操作後，可變成各字元均為 0 的直線數串 00000，如下所示：

$$\overset{1}{1}1111 \xrightarrow{1} 1\overset{1}{0}111 \xrightarrow{2} 1\overset{1}{0}101 \xrightarrow{3} 00\overset{1}{1}01 \xrightarrow{4} 0000\overset{1}{1} \xrightarrow{5} 00000。$$

(其中上方有標記的數字就是進行操作的點)

這種經過某種有限次的操作後，可變成各字元均為 0 的數串稱為好數串。同樣的，環狀數串 11111 經過 7 次操作後，也可變成各字元均為 0 的數串，如下所示：

$$\overset{1}{1}1111 \xrightarrow{1} 1\overset{1}{0}111 \xrightarrow{2} 1\overset{1}{0}101 \xrightarrow{3} 1\overset{1}{0}001 \xrightarrow{4} \overset{1}{1}1001 \xrightarrow{5} 0\overset{1}{1}001 \xrightarrow{6} 0000\overset{1}{1} \xrightarrow{7} 00000$$

所以，環狀數串 11111 也是好數串。但 5 字元的直線數串 11011 就不是一個好數串，因為每次操作後數串都不變，故無法經過有限次的操作，將其變成各字元均為 0 的數串。類似地，6 字元的環狀數串 011011 無法經過有限次的操作，將其變成各字元均為 0 的數串，所以它也不是一個好數串。

試依序回答下列問題。

- (1) 試說明：每一個 3 字元的直線數串都是好數串。
- (2) 試說明：每一個 4 字元的環狀數串都是好數串。
- (3) 有一個 8 字元直線數串 11111111，小明將它操作兩次如下：

$$11111111 \xrightarrow{1} 11011111 \xrightarrow{2} 11011011，$$

發現繼續操作，數串都不會改變，因此，他推論原來的數串 11111111 不是好數串。試問：小明的推論是否正確？並請說明理由。

- (4) 試問：是否每一個 7 字元的直線數串都是好數串？並請說明理由。
- (5) 試問：是否每一個 8 字元的環狀數串都是好數串？並請說明理由。
- (6) 試利用數學歸納法證明：若 $a_1 = 0$ 或 $a_n = 0$ ，則直線數串 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 都是好數串。
- (7) 試證：若在直線數串 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 中，有某一個 i 使得連續 2 字元 $a_i a_{i+1} = 00$ 或連續 3 字元 $a_i a_{i+1} a_{i+2} = 010$ 或 $a_i a_{i+1} a_{i+2} = 111$ ，則直線數串 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 都是好數串。
- (8) 試證：當 $n = 3k + 1 \geq 4$ (k 為正整數) 時，每一個 n 字元的直線數串都是好數串。
- (9) 試證：當 $n = 3k + 2 \geq 2$ (k 為非負整數) 時，恰有一個 n 字元的直線數串不是好數串。
- (10) 試問：當 $n = 3k \geq 3$ (k 為正整數) 時，是否每一個 n 字元的環狀數串都是好數串？如果是，請證明；如果不是，請找出所有的非好數串，並請說明理由。

2025 TRML 思考賽參考解答及評分建議

(1) 3 字元的直線數串共有 8 種，它們都是好數串，分別操作如下：

(i) 沒有 0： $\overline{111} \xrightarrow{1} \overline{101} \xrightarrow{2} \overline{001} \xrightarrow{3} 000$

(ii) 恰有 1 個 0： $\overline{011} \xrightarrow{1} \overline{111} \xrightarrow{2} \overline{101} \xrightarrow{3} \overline{001} \xrightarrow{4} 000$
 $\overline{101} \xrightarrow{1} \overline{001} \xrightarrow{2} 000$

$\overline{110} \xrightarrow{1} \overline{111} \xrightarrow{2} \overline{101} \xrightarrow{3} \overline{001} \xrightarrow{4} 000$

(iii) 恰有 2 個 0： $\overline{001} \xrightarrow{1} 000$ $\overline{010} \xrightarrow{1} 000$ $\overline{100} \xrightarrow{1} 000$

(iv) 全為 0：000

評分建議：1. 全部 8 種數串均操作正確得 6 分。

2. 僅操作一部分的數串，每操作 1 個正確得 1 分，但至多 3 分。

(2) 設 $abcd$ 是任意的 4 字元環狀數串。

(a) 若 $a=b=c=d=1$ ，可操作如下：

$\overline{1111} \xrightarrow{1} \overline{1011} \xrightarrow{2} \overline{1010} \xrightarrow{3} \overline{0010} \xrightarrow{4} 0000$ 。

(b) 若 a, b, c, d 中至少一數為 0，不失一般性，可設 $a=0$ ；則由問題(1)，3 字元直線數串 bcd 都是好數串；又 $a=0$ ，可獨立操作 bcd 變成各字元均為 0 的數串。故此種 4 字元的環狀數串都是好數串。亦可直接將環狀數串分成 4 種直接操作如下：

(i) a, b, c, d 中恰有一數為 0，僅有 1 種，即 0111，可操作如下：

$\overline{0111} \xrightarrow{1} \overline{0101} \xrightarrow{2} \overline{0001} \xrightarrow{3} 0000$

(ii) a, b, c, d 中恰有兩數為 0，僅有 2 種，即 0011 及 0101，可分別操作如下：

$\overline{0011} \xrightarrow{1} \overline{0111} \xrightarrow{2} \overline{0101} \xrightarrow{3} \overline{0001} \xrightarrow{4} 0000$

$\overline{0101} \xrightarrow{1} \overline{0001} \xrightarrow{2} 0000$

(iii) a, b, c, d 中恰有三數為 0，僅有 1 種，即 0001，可操作如下：

$\overline{0001} \xrightarrow{1} 0000$

評分建議：1. (a)部分操作正確獨立得 2 分。

2. (b)部分說明完整得 4 分。若直接操作 4 種數串，每操作 1 個正確得 1 分。

(3) 此 8 字元直線數串 11111111 是好數串，可以操作如下：

$\overline{11111111} \xrightarrow{1} \overline{10111111} \xrightarrow{2} \overline{10101111} \xrightarrow{3} \overline{10101011}$
 $\xrightarrow{4} \overline{00101011} \xrightarrow{5} \overline{00001011} \xrightarrow{6} \overline{00000011}$
 $\xrightarrow{7} \overline{00000011} \xrightarrow{8} \overline{00000101} \xrightarrow{9} \overline{00000001} \xrightarrow{10} 00000000$

評分建議：能操作正確得 6 分，否則 0 分。

(4) 我們可利用問題(1):「每一個3字元的直線數串都是好數串」的性質,推導「每一個7字元的直線數串也都是好數串」。

令 $a_1a_2a_3cb_1b_2b_3$ 為任意7字元的直線數串。

(a) 當 $c=0$ 時,首3字元 $a_1a_2a_3$ 是好數串,可獨立操作變成各字元均為0的數串;同樣,末3字元 $b_1b_2b_3$ 是好數串,也可獨立操作變成各字元均為0的數串。故在 $c=0$ 的情況下,此種7字元的直線數串都是好數串。

(b) 當 $c=1$ 時,分成以兩情況討論(目標是操作到 c 變成0):

(i) $a_3+b_1=0$ (即 $a_3=b_1=0$ 或 $a_3=b_1=1$)

此時可先操作 c ,使 c 變成0,再由(a)得知:此種7字元的直線數串都是好數串。

(ii) $a_3+b_1=1$ (由對稱性,可設 $a_3=0$ 且 $b_1=1$)

(1) 當 $b_2=1$ 時,可先操作 b_1 ,使 b_1 變成0,再操作 c ,使 c 也變成0,因此,由(a)得知此種7字元的直線數串都是好數串。

(2) 當 $b_2=0$ 時,可先操作 b_3 ,使 b_3 變成0,再操作 b_2 ,使 b_2 變成1;再由(1)得知此種7字元的直線數串也都是好數串。

評分建議: 1. (a)部分說明完整獨立得2分。

2. (b)部分每一種情況說明完整各得2分。

(5) 【解一】我們可利用問題(4):「每一個7字元的直線數串都是好數串」的性質,推導「每一個8字元的環狀數串也都是好數串」。

令 $cb_1b_2b_3\cdots b_7$ 為任意的8字元環狀數串。

(a) 當 $c=0$ 時,由問題(4)知道:後7字元直線數串 $b_1b_2b_3\cdots b_7$ 是好數串。又 $c=0$,直線數串 $b_1b_2b_3\cdots b_7$ 可獨立操作變成各字元均為0的數串。故在 $c=0$ 的情況下,此種8字元的環狀數串都是好數串。

(b) 當 $c=1$ 時,分成以下兩情況討論:

(i) 當 $b_1+b_7=0$ 時, $b_1=b_7=0$ 或 $b_1=b_7=1$;可先操作 c ,使 c 變成0,再由(a)得知:此種8字元的環狀數串都是好數串。

(ii) 當 $b_1+b_7=1$ 時,不失一般性,可設 $b_1=1$ 且 $b_7=0$,此時原環狀數串 $cb_1b_2b_3\cdots b_7$ 可以改寫成 $b_7cb_1b_2b_3\cdots b_6$,其中 $b_7=0$ 。再由(a)得知:此環狀數串 $b_7cb_1b_2b_3\cdots b_6$ 是好數串。又數串 $b_7cb_1b_2b_3\cdots b_6$ 與原數串 $cb_1b_2b_3\cdots b_7$ 代表同一種環狀數串;因此,原數串 $cb_1b_2b_3\cdots b_7$ 也是好數串。

【解二】令 $a_1a_2a_3\cdots a_8$ 為任意的8字元環狀數串。

(a) 若 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_8$ 中至少一數為0,不失一般性,可設 $a_1=0$;則由上述解法中的情況(a)可推得:此種8字元的環狀數串都是好數串。

(b) 若 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_8$ 均不為0,則此環狀數串為11111111。此時,我們可先操作其中一字元使該字元變成0,再由(a)推得:此種8字元的環狀數串都是好數串。亦可操作如

下：

$$\begin{aligned} \overline{11111111} &\xrightarrow{1} \overline{10111111} \xrightarrow{2} \overline{10101111} \xrightarrow{3} \overline{10101011} \xrightarrow{4} \overline{10101010} \\ &\xrightarrow{5} \overline{00101010} \xrightarrow{6} \overline{00001010} \xrightarrow{7} \overline{00000010} \xrightarrow{8} \overline{00000000} \end{aligned}$$

評分建議：1. 解一(a)部分說明完整獨立得2分，(b)部分每一種情況說明完整各得2分。

2. 解二(a)與(b)的情況說明完整各得3分。

(6) 設直線數串 $a_1a_2\cdots a_n$ ，其中 $a_1=0$ 。(註：依對稱性，證明 $a_n=0$ 的情況亦同)

當 $n=1$ 時，僅有一種直線數串 0；當 $n=2$ 時，共有兩種直線數串 00 及 $\overline{01} \xrightarrow{1} \overline{00}$ ；它們都是好數串。假設 $n=k$ 時，以 0 為首的 k 字元直線數串都是好數串。當 $n=k+1$ 時，對任意 $k+1$ 字元的直線數串 $a_1a_2\cdots a_{k+1}$ ，其中 $a_1=0$ ，分兩類討論如下：

(a) 若 $a_2=0$ ，則由數學歸納法的假設，末 k 字元直線數串 $a_2a_3\cdots a_{k+1}$ 是好數串。又因 $a_1=0$ ，直線數串 $a_2a_3\cdots a_{k+1}$ 可獨立操作成各字元均為 0 的數串。故在 $a_2=0$ 的情況下，此種 $k+1$ 字元的直線數串 $a_1a_2\cdots a_{k+1}$ 都是好數串。

(b) 若 $a_2=1$ ，則首 3 字元 $a_1a_2a_3$ 有兩種可能：010 及 011，它們都可操作成首 2 字元為 00：

$$\overline{010} \xrightarrow{1} \overline{000} \qquad \overline{011} \xrightarrow{1} \overline{111} \xrightarrow{2} \overline{101} \xrightarrow{3} \overline{001} \xrightarrow{4} \overline{000}$$

因此，由(a)可知：此種 $k+1$ 字元的直線數串 $a_1a_2\cdots a_{k+1}$ 也都是好數串。

故由數學歸納法可得：以 0 為首的 n 字元直線數串都是好數串。

評分建議：1. 說明數學歸納法中 $n=1$ 或 $n=2$ 時命題成立，且寫出正確的歸納法假設，獨立得2分。

2. 歸納證明中(a)與(b)的情況說明完整各得2分。

(7) (a) 若 $a_i a_{i+1} = 00$ ，則由問題(6)可知：直線數串 $a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_n$ 都是好數串。又因 $a_i=0$ ，直線數串 $a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_n$ 可獨立操作成各字元均為 0 的數串。此時末字元 a_n 變成 0，再由問題(6)可知：此種直線數串 $a_1a_2\cdots a_n$ 都是好數串。

(b) 若 $a_i a_{i+1} a_{i+2} = 010$ ，則可操作前 2 字元成為 00 的數串： $\overline{010} \xrightarrow{1} \overline{000}$ ；因此，由(a)可知：此種直線數串 $a_1a_2\cdots a_n$ 都是好數串。

(c) 若 $a_i a_{i+1} a_{i+2} = 111$ ，分三類討論如下：

(i) 當 $i=1$ 時，可操作 $\overline{111} \xrightarrow{1} \overline{101} \xrightarrow{2} \overline{001}$ ；因此，由(a)可知：此種直線數串 $a_1a_2\cdots a_n$ 都是好數串。

(ii) 當 $i=2$ 時，首 4 字元有 2 種可能：0111 及 1111，它們都可操作成首字元為 0 的字串如下：

$$\begin{aligned} &0111 \\ &\overline{1111} \xrightarrow{1} \overline{1011} \xrightarrow{2} \overline{0011} ; \end{aligned}$$

因此，由問題(6)可知：此種直線數串 $a_1a_2\cdots a_n$ 都是好數串。

(iii) 當 $i \geq 3$ 時，首 $i+2$ 字元有 4 類 $\cdots 00111, \cdots 01111, \cdots 10111$ 及 $\cdots 11111$ ，它們都可操作成有連續 2 字元為 00 的字串，如下：

$$\begin{array}{l} \cdots 00111 \\ \cdots \overline{01111} \xrightarrow{1} \cdots \overline{01011} \xrightarrow{2} \cdots 00011 \\ \cdots \overline{10111} \xrightarrow{1} \cdots \overline{10101} \xrightarrow{2} \cdots 10001 \\ \cdots \overline{11111} \xrightarrow{1} \cdots \overline{10111} \xrightarrow{2} \cdots \overline{10101} \xrightarrow{3} \cdots 10001 \end{array}$$

因此，由(a)可知：此種直線數串 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 都是好數串。

評分建議：(a)(b)與(c)的 3 種情況說明完整各得 2 分。

(8) 當 $n = 3k + 1 \geq 4$ 時，設 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 為任意的 n 字元直線數串。

由問題(6)及問題(7)知道：當數串的首字元 $a_1 = 0$ 或末字元 $a_n = 0$ 或有出現 00 或 010 或 111 時，直線數串 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 都是好數串。因此，只要考慮 $a_1 = a_n = 1$ 的情況，且出現 0 後不能再接 0，出現 01 後不能再接 0，出現 11 後不能再接 1。首先觀察首 3 字元的可能情形，不難發現僅有 2 種可能的數串：101 及 110。進一步分析，接下來的 3 個字元，101 之後接的仍為 101，而 110 之後接的仍為 110，每 3 字元就循環。又 $n = 3k + 1 \geq 4$ 且 $a_n = 1$ ，由此，我們僅須再考慮以下 2 種數串：

$$101101101 \cdots 1011 \text{ 及 } 110110110 \cdots 1101. \quad (\text{兩數串左右互為逆序})$$

其中， $\overline{101101101 \cdots 1011} \xrightarrow{1} 001101101 \cdots 1011$ 可操作成首字元 $a_1 = 0$ ，而

$$110110110 \cdots 1101 \xrightarrow{1} 110110110 \cdots 1100 \text{ 可操作成末字元 } a_n = 0,$$

因此，它們也都是好數串。

證畢！

評分建議：1. 說明只要考慮 $a_1 = a_n = 1$ 的情況，獨立得 2 分。

2. 能清楚由 $a_1 = 1$ 開始操作，得出不是好數串恰有 2 種可能，並能清楚說明它們都是好數串，每一種完整說明各得 2 分。

(9) 當 $n = 2$ 時，11 不是好數串；當 $n = 3k + 2 \geq 5$ 時， n 字元的直線數串 $110110110 \cdots 11011$ (每 3 字元 110 循環) 每次操作後數串都不變，故此直線數串不是好數串。因此，我們僅須再證明不是好數串的直線數串僅有上述唯一的一種。

設 n 字元的直線數串 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 不是好數串。由問題(6)及問題(7)知道：首字元 $a_1 = 1$ ，且當直線數串出現 0 後不能再接 0，出現 01 後不能再接 0，出現 11 後不能再接 1。仿問題(8)的說明，我們可發現直線數串 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 僅有以下兩種可能：

$$101101101 \cdots 1011 a_n \text{ 及 } 110110110 \cdots 1101 a_n.$$

又末字元 a_n 也不能為 0，故 $a_n = 1$ ；此時，第一種數串：101101101 $\cdots$ 10111 有出現連續 3 字元 111，故此數串是好數串。而第二種數串：110110110 $\cdots$ 11011 就是唯一的非好數串。

評分建議：1. 說明不是好數串的存在性，獨立得 2 分。

2. 能清楚說明由 $a_1 = 1$ 開始，不是好數串恰有 2 種可能，並指出其中一個是好

數串，每一種說明完整各得 2 分。

- (10) 當 $n=3$ 時，3 字元的環狀數串恰有 2 種不是好數串：110 及 111。當 $n=3k \geq 6$ 時，環狀數串 110110110...110 (每 3 字元 110 循環) 每次操作後數串都不會改變，故此環狀數串不是好數串。以下要再證明當 $n=3k \geq 6$ 時，不是好數串的環狀數串是唯一的。

首先，證明 (P 性質)：

設 $n \geq 6$ 。若在環狀數串 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 中，有某一個 i 使得連續 2 字元 $a_i a_{i+1} = 00$ 或連續 3 字元 $a_i a_{i+1} a_{i+2} = 010$ 或 $a_i a_{i+1} a_{i+2} = 111$ ，則環狀數串 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 都是好數串。

證：因為 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 是環狀數串，不失一般性，可設 $i=1$ 。

- (a) 若 $a_1 a_2 = 00$ ，則由問題(6)可知：直線數串 $a_2 a_3 \cdots a_n$ 都是好數串。又因 $a_1 = 0$ ，直線數串 $a_2 a_3 \cdots a_n$ 可獨立操作成各字元均為 0 的數串，故此種環狀數串 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 都是好數串。
- (b) 若 $a_1 a_2 a_3 = 010$ ，則可操作成有 2 字元為 00 的數串： $\overline{010} \xrightarrow{1} 000$ ；因此，由(a)可知：此種環狀數串 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 都是好數串。
- (c) 若 $a_1 a_2 a_3 = 111$ ，考慮接下來 2 字元 $a_4 a_5$ 的 4 種情況，分別操作如下：
- (i) 11100；由(a)可知：此種環狀數串 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 都是好數串。
- (ii) $\overline{11101} \xrightarrow{1} 10101$ ；因此，由(b)可知：此種環狀數串 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 都是好數串。
- (iii) $\overline{11110} \xrightarrow{1} 11010$ ；因此，由(b)可知：此種環狀數串 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 都是好數串。
- (iv) $\overline{11111} \xrightarrow{1} 10111 \xrightarrow{2} 10101$ ；因此，由(b)可知：此種環狀數串 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 都是好數串。

接下來，要利用 P 性質來證明不是好數串的環狀數串僅有一種排法。

設環狀數串 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 不是好數串。此時， $a_1, a_2, \dots, a_n$ 不能全為 0，不失一般性，可設 $a_1 = 1$ 。由 P 性質，可知：數串中不能出現 00 或 010 或 111；因此，由 $a_1 = 1$ 開始，依順時針方向，出現 0 後不能再接 0，出現 01 後不能再接 0，出現 11 後不能再接 1。由此可推得：由 $a_1 = 1$ 開始，首 3 字元僅有兩種可能的情形：101 及 110。進一步分析，接下來的 3 個字元，101 之後接的仍為 101，而 110 之後接的仍為 110，每 3 字元就循環。又 $n=3k \geq 6$ ，故可得環狀數串 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 僅有以下 2 種可能：

101101101...101 及 110110110...110。

又此 2 種數串代表同一種環狀數串，且都不是好數串，因此，不是好數串恰有一種。

證畢！

評分建議：1. 當 $n=3$ 時，寫出恰有 2 種不是好數串：110 及 111，獨立得 1 分。當 $n=3k \geq 6$ 時，寫出不是好數串的環狀數串 110110...110，獨立得 1 分。

2. 能證明 (P 性質)，獨立得 2 分。

3. 能說明當 $n=3k \geq 6$ 時，不是好數串的環狀數串恰有 1 種，再得 2 分。

TRML 個人賽-2025 第一回

I-1. 在坐標平面上，若 P 為圓 $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 36$ 上的一點， O 為原點，則向量 $\overrightarrow{OP}$ 在 y 軸上正射影長度的最大值為 _____。

I-2. 已知矩陣 $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 6 & e \\ f & g & h \end{bmatrix}$ 的每一行與每一列依序都成等比數列。若 $ah=4$ ，則 cf 乘積之值為 _____。

I-3. 設 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是一個由 1 到 n 的所有整數所組成的數列，其中 n 為正整數，若對某個 i 滿足 $2 \leq i \leq n-1$ ， $a_i > a_{i-1}$ 且 $a_i > a_{i+1}$ ，則稱第 i 個位置是一個「山峰」。例如 1,4,3,6,5,2 只有在第 2 和第 4 個位置是山峰，故 1,4,3,6,5,2 有 2 個山峰。若考慮所有由 1 到 6 的整數所組成的數列，則這些數列總共有 _____ 個山峰。

TRML 個人賽-2025 第二回

I-4. 設 $\triangle ABC$ 中 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = 20$ ，且 $\overline{AC}$ 的延長線與一條通過 B 點的直線交於 D 點。若 $\angle CDB = 45^\circ$ ，則 $\overline{BD} =$ _____。（化為最簡根式）

I-5. 若將一條細長紙帶對摺 1 次後再從中間剪 1 刀，可得 3 段紙帶，如左下圖所示；若將一條細長紙帶對摺 2 次後再從中間剪 2 刀，可得 9 段紙帶，如右下圖所示。若依此規則將一條細長紙帶對摺 5 次後再從中間剪 5 刀，可得 _____ 段紙帶。



I-6. 若正整數 $n < 40$ ，且 $(n+1)!$ 的正因數個數是 $n!$ 的正因數個數的兩倍，則滿足上述條件的 n 共有 _____ 個。

TRML 個人賽-2025 第三回

I-7. 已知 x, y 為正整數，且滿足 $\begin{cases} x + y + xy = 69 \\ x^2y + xy^2 = 810 \end{cases}$ ，則 $x^3 + y^3 =$ _____。

I-8. 設 a 與 k 皆為實數。若方程組 $\begin{cases} 8x + 3y = 12 \\ 4x + 5z = k \\ 3y - az = -22 \end{cases}$ 有無窮多組解，則 k 之值為 _____。

I-9. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{AC} = 6$ 且 $\angle A = 60^\circ$ 。若平面上的點 D 滿足 $\angle ADC = 120^\circ$ ，則 $\overline{BD}$ 長度的最大可能值為 _____。(化為最簡根式)

TRML 個人賽-2025 第四回

I-10. 滿足方程組 $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 = -18 \end{cases}$ 的整數序對 (x, y, z) 總共有 _____ 組。

I-11. 滿足方程式 $\log_4(x^3 + 8) = 1 + \log_2 x$ 的所有可能實數解之和為 _____。(化為最簡根式)

I-12. 設四邊形 $ABCD$ 中， $2\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{AD}$ ， $\overline{BA} = \overline{AD} = \overline{DC} = 4$ ，點 M 為 $\overline{CD}$ 的中點，點 P 為 $\overline{AB}$ 上一點，且 $\overline{PC}$ 與 $\overline{BM}$ 的交點 Q 。若 $\overline{PQ} : \overline{QC} = 2 : 3$ ，則 $\overline{BQ} =$ _____。(化為最簡根式)

TRML 個人賽第一回-2025

題號	答案
I-1	9
I-2	324
I-3	960

TRML 個人賽第二回-2025

題號	答案
I-4	$10\sqrt{6}$
I-5	161
I-6	13

TRML 個人賽第三回-2025

題號	答案
I-7	945
I-8	17
I-9	$2\sqrt{3} + 2\sqrt{7}$ (或 $\sqrt{40 + 8\sqrt{21}}$)

TRML 個人賽第四回-2025

題號	答案
I-10	6
I-11	$3 + \sqrt{5}$
I-12	$\frac{12}{25}\sqrt{34}$

TRML 接力賽-2025 第一回

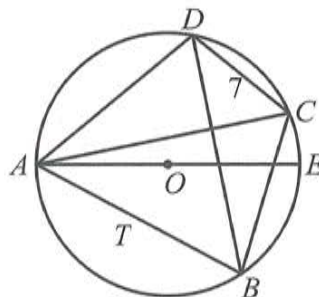
R1-1. 投擲一粒公正骰子兩次。若出現的點數和為 7 的條件下，則第一次出現偶數點的機率為 _____。

TRML 接力賽-2025 第一回

R1-2. 設 T 為前面傳來的答案。若直線 $2x+3y=a$ 是圓 $x^2+y^2+4Tx-8y+1=0$ 的一條對稱軸，則 a 之值為 _____。

TRML 接力賽-2025 第一回

R1-3. 設 T 為前面傳來的答案。如圖，四邊形 $ABCD$ 有一外接圓 O ，若 $\overline{AB}=T$ ， $\overline{CD}=7$ ，且 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 互相垂直，則此圓 O 的直徑 $\overline{AE}$ 之長為 _____。



TRML 接力賽-2025 第二回

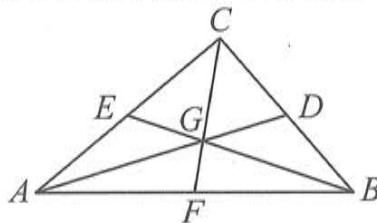
R2-1. 若正整數 n 使得 $\frac{7n^3+2n-88}{n}$ 是一個偶數，則 n 的最大可能值為 _____。

TRML 接力賽-2025 第二回

R2-2. 設 T 為前面傳來的答案。若多項式 x^3+2x^2+ax+b 除以 x^2+x-2 的餘式為 $-x-T$ ，則 $\frac{b}{a}$ 之值為 _____。

TRML 接力賽-2025 第二回

R2-3. 設 T 為前面傳來的答案。若 $\triangle ABC$ 的兩條中線 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 交於點 G ，且滿足向量 $\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}$ 的長度為 T ，則第三條中線 $\overline{CF}$ 的長度為 _____。



TRML 接力賽第一回-2025

題號	答案
R1-1	$\frac{1}{2}$
R1-2	10
R1-3	$\sqrt{149}$

TRML 接力賽第二回-2025

題號	答案
R1-1	44
R1-2	23
R1-3	69