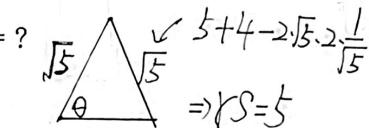


11. $11! \cdot 11! \cdot 3! \cdot (43!) \cdot 5! \cdot (65!) \cdots 19! \cdot (20! \cdot 19!) = (11 \cdot 3! \cdots 19!)^2 \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 20)$
 $= ()^2 \cdot 2^{10} \cdot 10! \rightarrow$

7. $n = \prod_{k=1}^{20} (k!)$, $m \in \mathbb{N}$, $\frac{n}{m}$ 為完全平方數，求滿足條件的最小 m 值。
 $\underline{\underline{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}}$
 $\Rightarrow 7$

12. 滿足 $4Z_1^2 + 5Z_2^2 + 4Z_3^2 = 4Z_1Z_2 + 6Z_2Z_3 + 4Z_3Z_1$ ，若複數平面上以 Z_1, Z_2, Z_3 為頂點
題目可能 的三角形，其三邊長由小到大分別為 a, b, c 且 $a:b:c=2:r:s$ ，則 $r:s=?$
有誤 $\text{設 } Z_3=0, 4\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2 - 4\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) + 5 = 0 \Rightarrow \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1}{2} \pm i = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}i\right)$ 
 $\Rightarrow r:s=5$

13. 已知等差數列 $\{a_n\}$ 中， $a_2 = 5, a_6 = 21$ ，若數列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 項和為 S_n ，
 $k > \frac{14}{3}$ 若 $S_{2n+1} - S_n \leq \frac{k}{15}$ ，對所有的正整數 n 恒成立，試求實數 k 的取值範圍

13. $a_n = 4n-3$, 令 $f(n) = S_{2n+1} - S_n$. $f(n+1) - f(n) = S_{2n+3} - S_{n+1} - (S_{2n+1} - S_n) = \frac{1}{8n+5} + \frac{1}{8n+9} - \frac{1}{4n+1}$

14. 已知斜率為 m 的直線 L 交三次曲線 $\Gamma: y = f(x) = ax^3 + px$ 於相異三點 A, B, C ，

$\text{若 } L_1, L_2, L_3$ 分別是曲線 Γ 在 A, B, C 三點的切線，

且 L_1, L_2, L_3 均與曲線 Γ 有另一交點，分別為 P, Q, R 三點。

試證 P, Q, R 三點共線；並以 m, a, p 表示過 P, Q, R 三點直線的斜率。

15. 114鳳新

15. 二階方陣 A 滿足 $A^T = A^{-1}$ ，證明： A 必為平面變換中的旋轉矩陣或鏡射矩陣。

14. 又 $L: y = mx + k, ax^3 + px - (mx + k) = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \quad A(\alpha, f(\alpha)), B(\beta, f(\beta)), C(\gamma, f(\gamma))$

$$m_A = 3\alpha^2 + p \Rightarrow L_A: y = (3\alpha^2 + p)(x - \alpha) + \alpha^3 + p\alpha \Rightarrow L_A: y = (3\alpha^2 + p)x - 2\alpha^3$$

$$\alpha x^3 + px - (3\alpha^2 + p)x + 2\alpha^3 = a(x-\alpha)^2(x-\gamma) \Rightarrow \alpha x^3 - 3\alpha^2 x + 2\alpha^3 = 0 \text{ 之3根: } \alpha, -\alpha, -\gamma$$

$$m_{PQ} = \frac{a(-\alpha)^3 - (-\gamma)^3}{-\alpha - (-\gamma)} + p = 4a(\alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2) + p$$

$$\alpha x^3 + px - (\alpha x + k) = 0$$

$$\alpha\beta^3 + p\beta - (\alpha\beta + k) = 0$$

$$\Rightarrow a(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = m - p \Rightarrow m_{PQ} = 4m - 3p$$

$$m_{QR} = m_{RP} = 4m - 3p$$