

$$\text{[11]} \quad 1! \cdot (2 \cdot 1!) \cdot 3! \cdot (4 \cdot 3!) \cdot 5! \cdot (6 \cdot 5!) \cdots 19! \cdot (20 \cdot 19!) = (1! \cdot 3! \cdots 19!)^2 \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 20)$$

$$= (\quad)^2 \cdot 2^{10} \cdot 10! \quad \checkmark$$

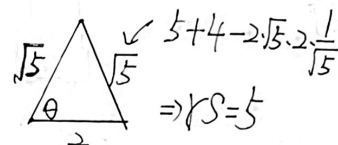
7 11. $n = \prod_{k=1}^{20} (k!)$, $m \in \mathbb{N}$, $\frac{n}{m}$ 為完全平方數, 求滿足條件的最小 m 值。 $\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{\Rightarrow 7}$

12. 滿足 $4Z_1^2 + 5Z_2^2 + 4Z_3^2 = 4Z_1Z_2 + 6Z_2Z_3 + 4Z_3Z_1$, 若複數平面上以 Z_1, Z_2, Z_3 為頂點

題目可能

的三角形, 其三邊長由小到大分別為 a, b, c 且 $a:b:c=2:r:s$, 則 $rs=?$

有誤 設 $Z_3=0$, $4\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2 - 4\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) + 5 = 0 \Rightarrow \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1}{2} \pm i = \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}i \right)$



13. 已知等差數列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 5$, $a_6 = 21$, 若數列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前 n 項和為 S_n ,

$k \geq \frac{14}{3}$

若 $S_{2n+1} - S_n \leq \frac{k}{15}$, 對所有的正整數 n 恆成立, 試求實數 k 的取值範圍

$$= \frac{1}{a_{2n+2}} + \frac{1}{a_{2n+3}} - \frac{1}{a_{n+1}}$$

13 $a_n = 4n - 3$, 令 $f(n) = S_{2n+1} - S_n$, $f(n+1) - f(n) = S_{2n+3} - S_{n+1} - (S_{2n+1} - S_n) = \frac{1}{8n+5} + \frac{1}{8n+9} - \frac{1}{4n+1}$

14. 已知斜率為 m 的直線 L 交三次曲線 $\Gamma: y = f(x) = ax^3 + px$ 於相異三點 A, B, C ,

$4m-3p$

若 L_1, L_2, L_3 分別是曲線 Γ 在 A, B, C 三點的切線,

且 L_1, L_2, L_3 均與曲線 Γ 有另一交點, 分別為 P, Q, R 三點。

試證 P, Q, R 三點共線; 並以 m, a, p 表示過 P, Q, R 三點直線的斜率。

$$f'(1) = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{1}{5} + \frac{1}{9}$$

$$= \frac{1}{15} \cdot \frac{14}{3} \Rightarrow k \geq \frac{14}{3}$$

15 114 鳳新

15. 二階方陣 A 滿足 $A^T = A^{-1}$, 證明: A 必為平面變換中的旋轉矩陣或鏡射矩陣。

14 $\frac{1}{3}L: y = mx + k$, $ax^3 + px - (mx + k) = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ $A(\alpha, f(\alpha)), B(\beta, f(\beta)), C(\gamma, f(\gamma))$

$m_A = 3a\alpha^2 + p \Rightarrow L_A: y = (3a\alpha^2 + p)(x - \alpha) + a\alpha^3 + p\alpha \Rightarrow L_A: y = (3a\alpha^2 + p)x - 2a\alpha^3$

$ax^3 + px - (3a\alpha^2 + p)x + 2a\alpha^3 = a(x-\alpha)^2(x-\square) \Rightarrow ax^3 - 3a\alpha^2x + 2a\alpha^3 = 0$ 2 3 根: $\alpha, \alpha, -2\alpha$

$m_{PQ} = \frac{a((-2\alpha)^3 - (-2\beta)^3)}{-2\alpha - (-2\beta)} + p = 4a(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) + p$

$a\alpha^3 + p\alpha - (m\alpha + k) = 0$

$\Rightarrow a(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = m - p \Rightarrow m_{PQ} = 4m - 3p$, $m_{QR} = m_{RP} = 4m - 3p$

$a\beta^3 + p\beta - (m\beta + k) = 0$