高雄市立高雄高級中學114學年度正式教師甄選數學科題目卷

114.9.30(二) ~ 10.6(一) Ru

第一部分：計算證明題(每題6分，共計30分。請在答案卷上作答，請清楚註明題號並須寫出計算過程或證明理由，否則將酌予扣分)

1. 設一箱中有4個球，分別標示數字0、4、1、3；今一次取一球記錄球上的數字後，再放回箱中，共取114次。若每次每球被取中的機會均等，則共有奇數次取中1號球的機率為？

$\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{115}$　$\boxed{1}$　$p=\frac{1}{4}$，$q=\frac{3}{4}$　$\frac{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)^{114}-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)^{114}}{2}=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{115}$

2. 坐標空間中，已知 $\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=(-12,9,8)$，$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(-10,8,6)$，$\overrightarrow{b}=(1,2,t)$，$t\in R$，則 $\overrightarrow{a}=$？

$(5,4,3)$　$\boxed{2}$

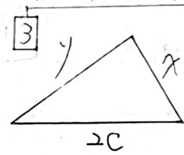
$\begin{matrix}-12 & 9 & 8 & -12 & 9 & 8\\ 5 & -4 & -3 & 5 & -4 & -3\end{matrix}$　令 $\overrightarrow{a}=k(5,4,3)$

$\begin{matrix}5 & 4 & 3 & 5 & 4 & 3\\ 1 & 2 & t & 1 & 2 & t\end{matrix}$

$6 \Rightarrow k=1 \Rightarrow (5,4,3)$

3. 已知A、B分別是 $\Gamma_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的兩焦點且焦距長的一半記為c，現有 Γ_1 上的動點P。若 $\angle PAB=\alpha$、$\angle PBA=\beta$，試求 $\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}=$？(請以a,b,c的關係式表示)

$\frac{a-c}{a+c}$　$\boxed{3}$



$\Delta^2=r^2s^2=s(s-x)(s-y)(s-2c)$

$\frac{r}{s-x}\cdot\frac{r}{s-y}=\frac{s-2c}{s}=\frac{a-c}{a+c}$

4. 某校高二有兩個文史法政學群的班級，
第一個班有 n_1 位學生：上次月考數學B科成績平均為 μ_1 分、標準差 σ_1 分；
第二個班有 n_2 位學生：上次月考數學B科成績平均為 μ_2 分、標準差 σ_2 分。
若這兩班學生共 (n_1+n_2) 位學生的上次月考數學B科成績標準差為 σ 分。
試討論 σ_1、σ_2、σ 三者大小關係的可能情形。

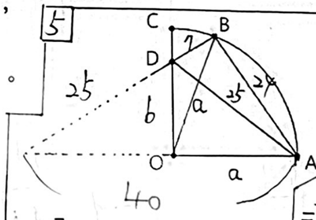
$\boxed{4}$

$\sigma_1^2=\frac{1}{n_1}\left(\sum_{i=1}^{n_1}x_i^2-n_1\mu_1^2\right)$

$\sigma_2^2=\frac{1}{n_2}\left(\sum_{i=1}^{n_2}y_i^2-n_2\mu_2^2\right)$

5. 扇形OAC中，O為圓心，$\overset{\frown}{AC}$ 上有一點B，$\overline{OC}$ 上有一點D，$\angle AOC=\angle ABD=90°$，$\overline{BD}=7$，$\overline{AB}=24$，求此扇形之面積。

$\boxed{5}$



法1：$25a=7a+24b \Rightarrow a:b=4:3 \Rightarrow a=20$

法2 $\Rightarrow a=\frac{40}{2}=20$

$\frac{\pi\cdot 20\cdot 20}{4}=100\pi$

$\sigma^2=\frac{1}{n_1+n_2}\left(n_1(\mu_1^2+\sigma_1^2)+n_2(\mu_2^2+\sigma_2^2)-(n_1+n_2)\cdot\frac{(n_1\mu_1+n_2\mu_2)^2}{(n_1+n_2)^2}\right)$

$\left(n_1\mu_1^2(n_1+n_2)+n_2\mu_2^2(n_1+n_2)-(n_1\mu_1+n_2\mu_2)^2\right)$

$=\frac{n_1}{n_1+n_2}\sigma_1^2+\frac{n_2}{n_1+n_2}\sigma_2^2+\frac{n_1n_2}{(n_1+n_2)^2}(\mu_1-\mu_2)^2$

(1) $\sigma_1=\sigma_2$：$\mu_1=\mu_2 \Rightarrow \sigma_1=\sigma_2=\sigma$

$\mu_1\neq\mu_2 \Rightarrow \sigma=\sigma_2<\sigma$

(2) 設 $\sigma_1<\sigma_2$

$\sigma^2=\sigma_2^2 \Rightarrow n_1(\sigma_2^2-\sigma_1^2)=\frac{n_1n_2}{n_1+n_2}(\mu_1-\mu_2)^2$

當 $\frac{n_1n_2}{n_1+n_2}(\mu_1-\mu_2)^2=n_1(\sigma_2^2-\sigma_1^2)$　$\sigma_1<\sigma_2=\sigma$

~　>　~　$\sigma_1<\sigma_2<\sigma$

~　<　~　$\sigma_1<\sigma<\sigma_2$

第二部分：計算證明題(每題 7 分，共計 70 分。請在答案卷上作答，請清楚註明題號並須寫出計算過程或證明理由，否則將酌予扣分)

$\boxed{6}$ 轉移 ↓　$(鏡\times旋)^2 \to (鏡)^2 = I$　$\begin{bmatrix} s & t \\ 1-s & 1-t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} \Rightarrow s(x+y)+t(z+u)+(1-s)(x+y)+(1-t)(z+u) = x+y+z+u \Rightarrow 10$

10

6. 若 $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^{2025} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \\ \frac{7}{25} & \frac{24}{25} \end{bmatrix} \right\}^{114} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$，求 $a+b+c+d=$？

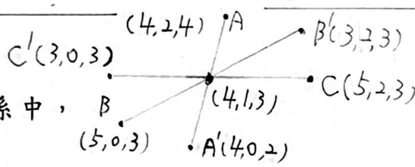
$\boxed{7}$ $P(4,1,3)$

$1)\begin{matrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{matrix}$　$(0,1,1)=\vec{V_1}$

$1)\begin{matrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$　$(1,-1,0)=\vec{V_2}$

$1)\begin{matrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$　$(1,1,0)=\vec{V_3}$

7. 空間坐標系中，



$\Rightarrow E_{ABC}: x+z=8$　$E_{A'B'C'}: x+z=6$

有三個平面 $E_1: z=3$、$E_2: x-y+z=6$、$E_3: x+y-z=2$。　$\Rightarrow E_{ABC'}: y-2z=-6$　$E_{A'BC}: y-2z=-4$

令 E_1 與 E_2 相交的直線為 L_3；E_2 與 E_3 相交的直線為 L_1；E_3 與 E_1 相交的直線為 L_2。

已知三直線 L_1、L_2、L_3 有共同交點 P，若 A、B、C 分別在 L_1、L_2、L_3 上，且

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}=\sqrt{2}$。　$\Rightarrow E_{AB'C}: y=2$　$E_{A'BC'}: y=0$　$\Rightarrow E_{AB'C'}: x-z=0$　$E_{A'BC}: x-z=2$

試求：(1) 四面體 $PABC$ 的體積為？

(1) $\frac{1}{3}$　$V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{3}$

(2) 8種　(2) 過 A、B、C 三點的平面有幾種可能？方程式為何？

$x+z=8$　$y-2z=-6$　$y=2$　$x-z=0$

$x+z=6$　$y-2z=-4$　$y=0$　$x-z=2$

$\boxed{8}$ yymath

$\frac{13}{100} = \frac{1}{7+\frac{9}{13}} = \frac{1}{7+\frac{1}{1+\frac{4}{9}}} = 0+\frac{1}{7+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}}} = [0\,7\,1\,2\,4]$

8. 某籃球員在 NBA 冠軍賽 4 場比賽中，一共得到 25 分，其 3 分球(每命中一球得 3 分)之命中率近似值為 13%。設此球員在此 4 場比賽中 3 分球一共出手 n 球，命中 k 球，在現有的資訊條件下，求使其命中率最接近 13%之數對$(n,k)=$？ (54,7)

$\frac{k}{n} \doteqdot \frac{13}{100}$　$1 \le k \le 8$

最末項愈小，分子分母愈小

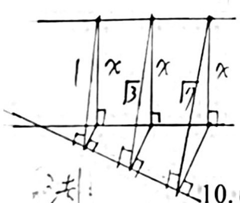
$[0\,7\,1\,2\,3] = \frac{1}{7+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}}} = \frac{10}{77}$　↗ 不合　$[0\,7\,1\,2\,2] = \frac{1}{7+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}} = \frac{7}{54}$

9. 空間中兩直線 L_1 與 L_2 互為歪斜線，若 L_1 上有相異三點 A、B、C 滿足 $\overline{AB}=\overline{BC}$ 且 A 點到 L_2 的距離為 1；B 點到 L_2 的距離為 $\sqrt{3}$；C 點到 L_2 的距離為 $\sqrt{7}$；試求 L_1 與 L_2 的公垂線段長。

113 永春 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

112 竹代理

$\boxed{9}$

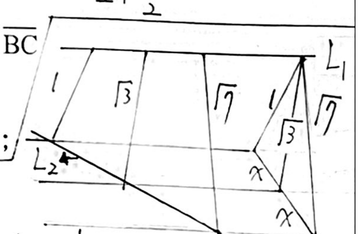


法1

$\Rightarrow 2\sqrt{x^2-3}+\frac{3}{\sqrt{x^2-3}} = 2\sqrt{x^2-1}$

$2\sqrt{x^2-3} = \sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-7}$　$\Rightarrow 4x^2+\frac{9}{x^2-3} = 4x^2-4$

$\frac{3}{\sqrt{x^2-3}} = k = \sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-7}$　$\Rightarrow x^2 = \frac{-9}{4}+3 = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$

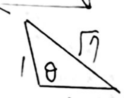


$1+7=2(x^2+1)$

$\Rightarrow x=1$，$d(L_1,L_2)=h=1\cdot\sin 120^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{9}$ 法2



$\cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\theta = 120^\circ$

10. 已知 $p \ne 0$，α、β、γ 為 $x^3-px+p^3=0$ 的三個根，試以 p 表示 $\frac{\alpha-p}{\alpha+p}+\frac{\beta-p}{\beta+p}+\frac{\gamma-p}{\gamma+p}$ 之值。 $6p+1$

$\boxed{10}$ $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$\Rightarrow \frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma} = \frac{f'(x)}{f(x)}$

$f'(x)=3x^2-p$

$\frac{\alpha-p}{\alpha+p} = 1-\frac{2p}{\alpha+p}$

所求 $= 3-2p\left(-\frac{f'(-p)}{f(-p)}\right)$

$= 3+2p\cdot\frac{3p^2-p}{p^3} = 6p+1$