樺加沙颱風　114

桃園市立陽明高中數學科教甄試題

2025.9.22(一)～9.27(六) Ru

一、　填充題，每題 5 分，共 60 分。

$6x^2-10x+12$

1. 設實係數多項式 $f(x)=2x^3+x^2+2x+3-\int_1^x f(t)\,dt$，則 $f(x)=$

$f'(x)=6x^2+2x+2-f(x)$　令 $f(x)=6x^2+ax+b$

$\boxed{1}$ $\Rightarrow f(x)=6x^2+2x+2-f'(x)$ $\Rightarrow f'(x)=12x+a$ $\Rightarrow f(x)=6x^2-10x+2-a$

$f(1)=8=-2-a$ $\Rightarrow a=-10$　$f(x)=6x^2-10x+12$

2. 有 6 個紅球，3 個藍球，3 個黃球，將這些球放置於一條線上，假設同色球沒有區別，試問

100

同色球不相鄰的放法有＿＿＿＿＿種。

$\boxed{2}$

□ B B B Y Y □

R R R R R R

$\left(\frac{5!}{3!2!}\cdot 2\right)\cdot 2=40$

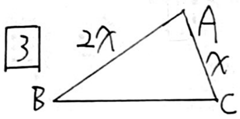
BY　BB Y Y　$\frac{5!}{2!2!}\cdot 2=60$　$\nearrow 100$

3. 在 ΔABC 中，$\overline{AB}=2\overline{AC}$，$\overline{AD}$ 為 $\angle A$ 的角平分線且 $\overline{AD}=k\overline{AC}$，若已知 ΔABC 的面積為 1，

$\sqrt{3}$

試求 $\overline{BC}$ 的最小值為

$\boxed{3}$



$\overline{BC}^2=5x^2-4x^2\cos A$　$\Delta=x^2\sin A=1$

$=\frac{5-4\cos A}{\sin A}$ 令 $=t$

$\Rightarrow t\sin+4c=5\le\sqrt{t^2+16}$

$\Rightarrow t^2-9\ge 0\Rightarrow t\ge 3$ or $t\le -3$

$\Rightarrow \min=\sqrt{3}$

$\frac{35\sqrt{6}}{12}$

4. 在複數平面上，設複數 $z=a+bi$，$a,b\in R$，且 $a^2+b^2=1$，試求 $\left|z^2+z-6\right|$ 之最大值為＿＿。

$\boxed{4}$ 令 $z=e^{i\theta}$

$|z|\left|z-\frac{6}{z}+1\right|$

$=\left|-5c+1+i(7s)\right|$

$\Rightarrow -24c^2-10c+50$

$=-2(12c^2+5c-25)$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{1225}{4\cdot 12}\cdot 2}=\frac{35\sqrt{6}}{12}$ #

$\left[\frac{1}{8},1\right]$

5. 方程式 $\sin^8 x+\cos^8 x=m$ 若有實數解，則 m 的範圍為＿＿＿＿＿。

$\boxed{5}$ 令 $\sin^2 x=t$

$f(t)=t^4+(1-t)^4$

$f'(t)=0\Rightarrow t^3=(1-t)^3$

$\Rightarrow t=\frac{1}{2}$，$\min=\frac{1}{8}$，$\max=1$

$\frac{1}{2n-1}$

6. 已知數列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，當 $n\ge 2$ 時，其前 n 項和 S_n 滿足 $S_n^{\,2}=a_n\left(S_n-\frac{1}{2}\right)$，求 S_n 的表達式

為

$\boxed{6}$ $S_n^2=(S_n-S_{n-1})(S_n-\frac{1}{2})$

$\Rightarrow -S_nS_{n-1}+\frac{1}{2}S_{n-1}=\frac{1}{2}S_n$

$\Rightarrow \frac{1}{S_n}=\frac{1}{S_{n-1}}+2=2n-1\Rightarrow S_n=\frac{1}{2n-1}$

$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$

7. 已知橢圓 Γ 與雙曲線 $\Gamma_1:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 有相同焦點，且 Γ 上一點 P 在直線 $L:x-y+9=0$ 上，若

欲使橢圓 Γ 之長軸最短，此時 Γ 之方程式為＿＿＿＿＿＿＿。

$\boxed{7}$ $c^2=9$，$F_1(-3,0)$，$F_2(3,0)$

$b^2=d(F_1,L)\cdot d(F_2,L)=\frac{6\times 12}{2}=36$

$\Rightarrow \frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$

8. 設 $x,y\in$□ 滿足 $x^2+y^2-2y\le 0$，求 $\dfrac{x+2y-5}{x-y-1}$ 之最大值＝____________。

$\frac{7+\sqrt{41}}{2}$ $x^2+(y-1)^2\le 1$ 令 $k=\frac{C+2S-3}{C-S-2}$ ⇒ $|(k-1)C-(k+2)S|=|2k-3|\le\sqrt{(k-1)^2+(k+2)^2}$

$\boxed{8}$ 令 $(x,y)=(C,S+1)$ ⇒ $2k^2-14k+4\le 0$ ⇒ $max=\frac{7+\sqrt{41}}{2}$

9. 求與曲線 $y=x^4-2x^3+4x$ 切於相異兩點的切線方程式為____________。

$y=3x-\frac14$ 令 ⇒ $x^4-2x^3+0x^2+(4-m)x-k=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ 　$\alpha+\beta=1$ 　⇒ $m=3,\ k=-\frac14$

$\boxed{9}$ $L: y=mx+k$ 　4根：$\alpha,\alpha,\beta,\beta$ 　$\alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta=1+2\alpha\beta=0$ 　$2\alpha\beta(\alpha+\beta)=m-4$ 　$(\alpha\beta)^2=-k$ 　$L: y=3x-\frac14$

$\frac34$ 10. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1^2+2^2+\cdots+n^2)}{(\sqrt1+\sqrt2+\cdots+\sqrt n)^2}$ 的值＝__________。(若發散填「不存在」)

$\boxed{10}$ $\sum_{k=1}^{n}\sqrt k=n\cdot n^{\frac12}\sum_{k=1}^{n}\frac1n\sqrt{\frac kn}$ ⇒ $\int_0^1 x^{\frac12}dx=\frac23$ 　$\dfrac{\frac n6(n+1)(2n+1)}{n^3\cdot\frac49}\to\dfrac{\frac13}{\frac49}=\frac34$

$\frac{11}{2}$ 11. 袋子裡有七顆球，其中 1 號球三顆、2 號球四顆。以取後放回方式，每次隨機抽取兩球(每球被取到機率均等)，並記錄此兩球號碼，若兩球號碼相同，則可重複再隨機抽取兩球，直至兩球號碼不同則停止抽取，完成一輪操作。令隨機變數 X 表示每輪取出球號碼總和，求 X 的期望值＝ $\boxed{11}$ $P(11)=\frac{C^3_2}{C^7_2}=\frac17$，$P(22)=\frac{C^4_2}{C^7_2}=\frac27$，$P(13)=\frac47$，$E=\frac17(E+2)+\frac27(E+4)+\frac47\cdot3$

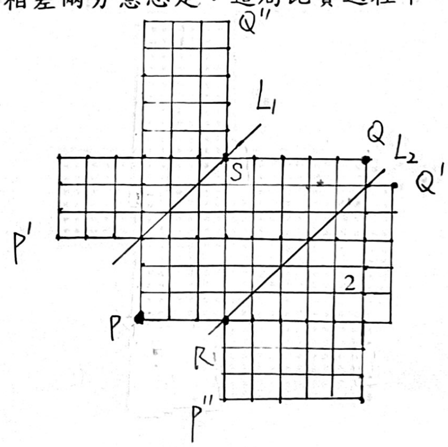
⇒ $E=\frac{11}{2}$

(Ex1：某輪先取出兩球 1 號，再取出兩球 2 號，再取出一球 1 號一球 2 號，則 X=2+4+3=9；

Ex2：某輪先取出兩球 2 號，再取出兩球 2 號，再取出一球 1 號一球 2 號，則 X=4+4+3=11。)

12. 甲乙兩人進行每局 8 分的桌球比賽，兩人實力相當(每一分甲乙獲勝機率各 $\frac12$，先得 8 分者獲勝)，已知這局比賽結果甲 8:6 獲勝，則這局比賽過程中，兩人分差保持最多相差兩分的機率＝$\frac{729}{2^{14}}$。

(分差保持最多相差兩分意思是：這局比賽過程中，|甲分數－乙分數|≤2。)(以指數型式作答即可)



全 $-(n(L_1)+n(L_2)-n(L_1\to L_2)-n(L_2\to L_1))$

$=C^{14}_6-(C^{14}_3+C^{14}_{15}-C^{14}_2-1)=729$

$P'\to Q$ 　$P\to Q'$ 　$P'\to Q'$

$P\to R\to S\to Q$

$(P''\to Q'')$