2 thepiano

$1^\circ: a_2-a_1=a_3-a_2 \overset{令}{=} d$

$\Rightarrow \sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}=\sqrt{S_3}-\sqrt{S_2}$

$\Rightarrow 2\sqrt{S_2}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_3} \Rightarrow 4S_2=S_1+S_3+2\sqrt{S_1S_3}$

$\Rightarrow 4(2a_1+d)=4a_1+3d+2\sqrt{3a_1(a_1+d)}$

$\Rightarrow 4a_1+d=2\sqrt{3a_1(a_1+d)} \Rightarrow 16a_1^2+d^2+8a_1d=12a_1^2+12a_1d$

$\Rightarrow (2a_1-d)^2=0$

$\Rightarrow d=2a_1$

$2^\circ: \lambda=\dfrac{\sqrt{S_2}-1}{a_2-1}=\dfrac{\sqrt{S_3}-1}{a_3-1}=\dfrac{\sqrt{S_1}-1}{a_1-1} \Rightarrow \dfrac{2\sqrt{a_1}-1}{3a_1-1}=\dfrac{3\sqrt{a_1}-1}{5a_1-1} \Rightarrow a_1\sqrt{a_1}-2a_1+\sqrt{a_1}=0$

$\Rightarrow \sqrt{a_1}(\sqrt{a_1}-1)^2=0 \Rightarrow a_1=1$, $\lambda=\frac{1}{2}$

$(a_1, 3a_1, 5a_1)$

$3^\circ: S_n-S_{n-1}=a_n=2\sqrt{S_n}-1 \Rightarrow (\sqrt{S_n}-1)^2=S_{n-1}$

$\Rightarrow \sqrt{S_n}=\sqrt{S_{n-1}}+1 \Rightarrow \sqrt{S_n}=n$, $S_n=n^2$, $a_n=n^2-(n-1)^2=2n-1$

國立新竹科學園區實驗高級中等學校（高中及國中部）

114 學年度第 1 次教師甄選試題卷

考試科目：高中數學科　　甄選科別：高中數學領域-數學科

專業知識與教材教法

第二大題：計算與證明題，4 題，每題 10 分，共 40 分。

說明：(1)作答時請將答案依照題號順序寫在答案卷上。

(2)需詳列計算過程，只寫出答案無過程者不予計分。

(1) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{PD}=(-2,1,0)\cdot(1,2,-t)=0$

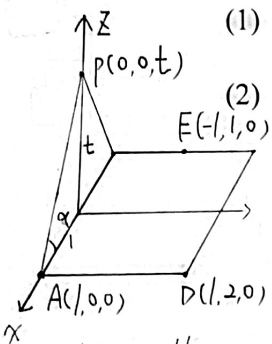
1

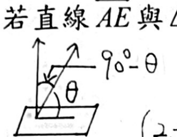
1. 如下圖，底面為正方形的四角錐 $P\text{-}ABCD$，其中 ΔPAB 垂直底面正方形 $ABCD$ 且 $\overline{PB}=\overline{AB}$。若 E 為 $\overline{BC}$ 中點，則：

(1) 當 $\angle PBA=60^\circ$ 時，試證明: $\overline{AE}\perp\overline{PD}$

(2) 若直線 $\overline{AE}$ 與 ΔPAD 夾角為 θ，則 $\cos\theta$ 的取值範圍為何？$(\frac{1}{\sqrt{5}},1)$

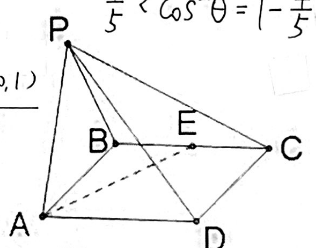
$\frac{1}{5}<\cos^2\theta=1-\frac{4}{5}\sin^2\alpha<1$





$\sin\theta=\dfrac{(2,-1,0)\cdot(t,0,1)}{\sqrt{5}\sqrt{t^2+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\sin\alpha$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0<\sin\alpha<1$



(2) $\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & t & -1 & 0 & t \\ t & 0 & 1 & & & \end{matrix}$

Hard

$2n-1$

2. 已知各項皆為正整數的數列 <a_n> 的前 n 項和為 S_n 且對任意正整數 n，$\sqrt{S_n}=\lambda(a_n-1)+1$，$\lambda$ 為正實數。若 $2a_2=a_1+a_3$，試求：數列 <a_n> 的一般項。

3 令 $t=\sin^2 x$，$0\le t\le 1$

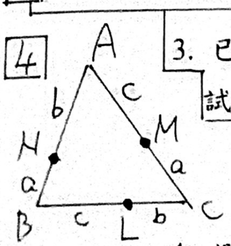
$g(t)=t^6+(1-t)^6$

$g'(t)=6t^5-6(1-t)=0 \Rightarrow t=\frac{1}{2}$，$g''(\frac{1}{2})>0$　$M=g(0)=g(1)=1$

$\Rightarrow m=g(\frac{1}{2})=\frac{1}{32}$

4

3. 已知函數 $f(x)=\sin^{12}x+\cos^{12}x$。若 $f(x)$ 的最小值為 m、最大值為 M，試求：m 及 M 各為何？



$\frac{b}{c+a}(a\overrightarrow{BA}+c\overrightarrow{BC})+\frac{c}{a+b}(a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB})+\frac{a}{b+c}(b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC})=\vec{0} \Rightarrow (a+b)(b+c)b(a\overrightarrow{BA}+c\overrightarrow{BC})+(b+c)(c+a)c(a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB})+(a+b)(c+a)a(b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

4. 設 ΔABC 的三邊 $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ 的長度分別為 a,b,c，在邊 $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ 上分別取點 L,M,N，且 $\overline{BL}:\overline{LC}=c:b$，$\overline{CM}:\overline{MA}=a:c$，$\overline{AN}:\overline{NB}=b:a$。若 $b\overrightarrow{BM}+c\overrightarrow{CN}+a\overrightarrow{AL}=\vec{0}$，試問：$\Delta ABC$ 是什麼樣的三角形?

$\Rightarrow ab(a+b)(b-a)\overrightarrow{BA}+bc(b+c)(b-c)\overrightarrow{BC}+ca(c+a)(c-a)\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

$\Rightarrow$ 正 $\triangle$