國立新竹科學園區實驗高級中等學校（高中及國中部）

114 學年度第 1 次教師甄選試題卷

考試科目： 高中數學科 專業知識與教材教法　　甄選科別： 高中數學領域-數學科

**第一大題：填充題，10 題，每題 6 分，共 60 分。**

2025.8.29(五) 9.8(一) Ru

**說明：(1)作答時請將答案依照順序寫在答案卷上。**

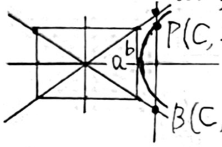
**(2)答案須化到最簡，否則不予計分。**

1

$\frac{3\sqrt{2}}{4}$

1. 設雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的右焦點為 $F$，過 $F$ 作與 $x$ 軸垂直的直線 $L$，$L$ 與兩條漸近線分別交於 $A$、$B$ 兩點，$P$ 是 $L$ 與雙曲線的一個交點，設 $O$ 為原點，若有實數 $m$、$n$，使得向量 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，且 $mn=\frac{2}{9}$，則：$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=$______。

$A(C,\frac{bc}{a})$　$P(C,\frac{b^2}{a})$　$B(C,\frac{-bc}{a})$



$\frac{b^2x^2}{a^2}-b^2=y^2$　$b^2\left(\frac{c^2-a^2}{a^2}\right)=\frac{b^4}{a^2}$

$\begin{cases} m+n=1 \\ mn=\frac{2}{9} \end{cases} \Rightarrow 9m^2-9m+2=0$　$\begin{matrix} 3 & -2 \\ 3 & -1 \end{matrix}$

$\frac{m}{n}=\frac{c+b}{c-b}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}$　取 $c=3$, $b=1$, $a=2\sqrt{2}$ $\Rightarrow \frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

2. 在一排有 20 張椅子的座位區中，要安排甲、乙、丙、丁、戊 5 人入坐，一人坐一張椅子，要求第 1 張與最後一張椅子不能安排人入坐，且每相鄰的 5 張椅子至少要有一人入坐，任兩人不能坐在相鄰的椅子上。試問：5 人入坐的方法有______種可能。

69600

$20-11=9$　$(H^6_9-C^6_1H^6_5+C^6_2H^6_1)\cdot 5!$

2

0000　0000

○甲○乙○丙○丁○戊○

放4個

3

$-\frac{1}{20}$

3. 等差數列 $\langle a_n\rangle$ 的前 $n$ 項和為 $S_n$。已知 $a_1=10$，$a_2$ 為整數，且對所有的正整數 $n$，$S_n\le S_4$ 恆成立。若 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，則：$b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{10}=$______。

$\begin{cases} a_2\in\mathbb{Z}\Rightarrow d\in\mathbb{Z} \\ a_5\le 0\Rightarrow 10+4d\le 0 \end{cases}$　$\Rightarrow d=-3$

$b_n=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$　$\frac{1}{-3}\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{-20}\right)=-\frac{1}{20}$　$10+10(-3)$

4

3

4. 若實數 $x,y$ 滿足：$4x^2-4xy+2y^2=1$，則：$3x^2+xy+y^2$ 的最大值與最小值的和為______。

$(2x-y)^2+y^2=1$

令 $\begin{cases} 2x-y=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$　$x=\frac{C+S}{2}$　$y=S$

$\frac{3}{4}(1+2SC)+\frac{2}{4}(S^2+SC)+S^2=\frac{1}{4}\left(6\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}+4\cdot\sin2\theta+3\right)$

$=\frac{1}{4}(-3C'+4S')+\frac{3}{2}$　$\Rightarrow 3$ #

5

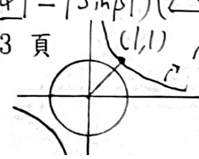
$3-2\sqrt{2}$

5. 設 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$，且滿足：$\sin\alpha\cdot\cos\beta+|\cos\alpha\cdot\sin\beta|=\sin\alpha\cdot|\cos\alpha|+|\sin\beta|\cdot\cos\beta$，則：$(\tan\gamma-\sin\alpha)^2+(\cot\gamma-\cos\beta)^2$ 的最小值為______。

$\sin\alpha(\cos\beta-|\cos\alpha|)=|\sin\beta|(\cos\beta-|\cos\alpha|)$ $\Rightarrow (\boxed{\sin\alpha}-|\sin\beta|)(\triangle\cos\beta-|\cos\alpha|)=0$

$\square^2+\triangle^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$

$(1,1)$　$xy=1$　$(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$



$\boxed{6}$ 285 6. $m,n$ 為正整數，則滿足：$\sqrt{m+\sqrt{m^2-n}}+\sqrt{m-\sqrt{m^2-n}}=6$ 的所有 $n$ 的總和為

$$\begin{cases}\alpha+\beta=6\\ \alpha^2+\beta^2=2m\\ \alpha\beta=\sqrt{n}\end{cases} \Rightarrow 36=2(m+\sqrt{n}) \quad m+\sqrt{n}=18$$

$m^2\geq n=(18-m)^2 \Rightarrow 36m\geq 18\times 18 \Rightarrow 9\leq m\leq 17 \Rightarrow 1\leq\sqrt{n}\leq 9 \Rightarrow \frac{9\cdot 10\cdot 19}{6}=285$

$3+2\sqrt{2}$ 7. 已知 $x,y\in\mathbb{R}^+$，則 $\left(x+\frac{1}{y}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2x}\right)^2$ 的最小值為______。

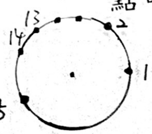
$\boxed{7}$ $x^2+\frac{1}{4x^2}+y^2+\frac{1}{y^2}+2\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{y}{x}\geq 1+2+2\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}$

"=" 成立：$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=1$, $y^2=2x^2$

8. 已知一圓內接 15 邊形，且圓心在此 15 邊形內部。從此 15 邊形中任取 3 個頂點可構成一個三角形，則所構成的三角形中最多有______個鈍角三角形。

442

$\boxed{8}$




1～14 任选 3个 $C^{14}_3$ 364

选 15 ∧ 不选 1, 2～14 任选 2个 $C^{13}_2$ + 78

442

$\boxed{9}$ 9. 將 $(x-\sqrt{3})^{50}+(x+1)^{50}$ 展開後可得多項式 $a_{50}x^{50}+a_{49}x^{49}+a_{48}x^{48}+\cdots+a_1x+a_0$，

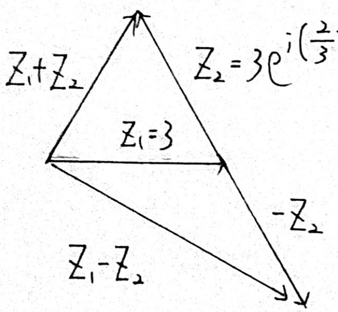
$\frac{49}{2}$ 設 $a_0-a_2+a_4-a_6+\cdots+a_{48}-a_{50}$ 之值為 $k$，試求：$\log_4|k|=$______。

所求 $=\mathrm{Re}(f(i)) \Rightarrow (-\sqrt{3}+i)^{50}+(1+i)^{50} = 2^{50}e^{i(\frac{5}{6}\pi\cdot 50)}+(\sqrt{2})^{50}e^{i(\frac{\pi}{4}\cdot 50)} \Rightarrow 2^{50}\cos\frac{\pi}{3}=2^{49} \Rightarrow \frac{1}{2}\log_2 2^{49}=\frac{49}{2}$

10. 設複數 $z_1,z_2$ 滿足：$|z_1|=|z_1+z_2|=3$，$|z_1-z_2|=3\sqrt{3}$，

$2\times 3^{4050}$ 則：$(z_1\cdot\overline{z_2})^{2025}+(\overline{z_1}\cdot z_2)^{2025}=$______。

$\boxed{10}$




$Z_2=3e^{i(\frac{2}{3}\pi)}$

$\left(3\cdot 3e^{i(-\frac{2}{3}\pi)}\right)^{2025}+\left(3\cdot 3e^{i(\frac{2}{3}\pi)}\right)^{2025}$ $\quad 2025\equiv 0 \pmod 3$

$=2\cdot 3^{4050}$