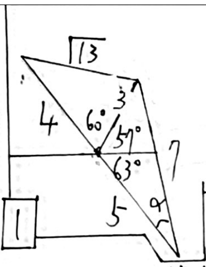
1



$\cos\alpha = \frac{65}{2\cdot5\cdot7} = \frac{13}{14}$

$\sin\alpha = \frac{3\sqrt3}{14} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{13}}{\frac{3\sqrt3}{14}} = \frac{7\sqrt{39}}{9}$

2 令 $x=1-p$, $y=1-q$, $z=1-r$

$(1-x)yz + x(1-y)z + xy(1-z) = \frac{11}{24}$

$\Rightarrow xy+yz+zx = \frac{11}{24} + 3\cdot\frac14 = \frac{29}{24}$

$xyz=\frac14$, $x(1-y)(1-z)+(1-x)y(1-z)+(1-x)(1-y)z = \frac14$

$\Rightarrow x+y+z = \frac14 + 2\cdot\frac{29}{24} - \frac34 = \frac{46}{24}$

$24t^3-46t^2+29t-6=0$

$\begin{array}{l} 24-46+29-6 \,|\, \frac12 \\ \quad +12-17+6 \\ \hline 24-34+12+0 \\ 12-17+6 \end{array}$ $\begin{array}{l} 4-3 \\ 3-2 \end{array}$ $t=\frac12, \frac23, \frac34$

$\Rightarrow \left(\frac12,\frac13,\frac14\right)$

2025.8.26(二) ~8.29(五) Ru

國立嘉義高級中學 114 學年度第一學期第 1 次教師甄選-數學科試題

一、 填充題：(每題 6 分，共 90 分)

$\frac{7\sqrt{39}}{9}$ 1. 在極坐標上三點 $A[4,117°]$、$B[3,57°]$與 $C[5,\theta]$，當 AC 長度有最大值時，ΔABC 的外接圓半徑為

2. 設甲、乙、丙三位射手之命中率依次為 p、q、r，其中 $p\ge q\ge r$，今三人同打一靶且互不影響，各發一彈時，此靶不中彈之機率為 $\frac{1}{4}$，恰中一彈之機率為 $\frac{11}{24}$，恰中二彈之機率為 $\frac{1}{4}$，則序組 $(p,q,r)=$________。 $\left(\frac12,\frac13,\frac14\right)$

3. $2^{n-1}\le x\le 2^n$，$n=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14$（其中 $2^0=1$），為數線上 14 個閉區間。則以上 14 個閉區間中有______個包含某個正奇數平方。 12

3 $[2,4]$, $[4,8]$ 2個沒有

4 $1=f\left(\frac23+\frac43\right)=\frac12 f\left(\frac23\right)f\left(\frac43\right)=\frac12 f\left(\frac23\right)\cdot\frac12\left(f\left(\frac23\right)\right)^2 \Rightarrow \sqrt[3]{4}$ #

4. $f(x)$ 為實函數且 $f(x)>0$，$\forall x\in R$，已知 $f(2)=1$、$2f(\alpha+\beta)=f(\alpha)\cdot f(\beta)$，其中 $\alpha,\beta\in R$，則 $f\left(\frac{2}{3}\right)=$ $\sqrt[3]{4}$

$(1-x)^{-2}=\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}$ $\quad \Sigma\left(p\left(k(k-1)p^{k-2}\right)+kp^{k-1}\right) \Rightarrow \frac13\left(2\cdot27\cdot\frac23+9\right)=15$ #

5 $(1-x)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k$ $\quad 2(1-x)^{-3}=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}$

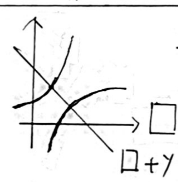
15 5. 試求 $\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)=$

6 $5=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+2(1+y)\ge 3\cdot\left(\frac{x^2(1+y)}{2}\right)^{\frac13} \Rightarrow \left(\frac{125}{27}\cdot2\right)^{\frac12}=\frac{5\sqrt{30}}{9}$

$\frac{5\sqrt{30}}{9}$ 6. 若 $x>0$、$y>-1$，且 $x+2y=3$，則 $x\cdot\sqrt{1+y}$ 的最大值為

7 $x-1+2^{x-1}=\frac32$

$x-1+\log_2(x-1)=\frac32$

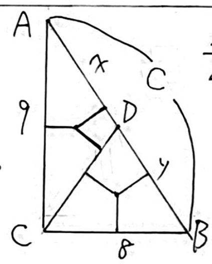


$\square+y=\frac32$

$\frac{\alpha-1+\beta-1}{2}=\frac{\frac32}{2}$ $\Rightarrow \alpha+\beta=\frac72$

$\frac72$ 7. 若 α 為 $2x+2^x=5$ 之解，β 為 $2x+2\log_2(x-1)=5$ 之解，則 $\alpha+\beta=$______。

8



$\frac{\Delta_1}{\Delta_2}=\frac{xb\cdot\frac{a}{c}}{ya\frac{b}{c}}=\frac{x}{y}=\frac{9+6+x}{9+8+y}=\frac{15}{14}$

$\frac{15}{14}$ 8. ΔABC 為直角三角形且 $\angle C=90°$，D 為斜邊 $\overline{AB}$ 上一點，$\overline{AC}=9$、$\overline{BC}=8$、$\overline{CD}=6$。已知 ΔACD 之內切圓與 ΔBCD 之內切圓有相同的半徑，則 ΔACD 面積是 ΔBCD 面積的______倍。

9 $L: x-y=0$, $P(t^2+4,t)$

$d(P,L)=\frac{1}{\sqrt2}(t^2-t+4)$

$\ge\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{15}{4}=\frac{15\sqrt2}{8}$

$\frac{15\sqrt2}{8}$ 9. 若 A 為 $y=|x|$ 上一點，B 為 $x=y^2+4$ 上一點，則 $\overline{AB}$ 長的最小值為______。

18 10. 已知 $f_n(x)=\cos x\cos2x\cos3x\cdots\cos nx$，若 $|f_n''(0)|\ge 2025$，則 n 之最小值為______。

satsuki 931000

10 $f_n'(x)=f_{n-1}'(x)\cos(nx)-nf_{n-1}(x)\sin(nx)$

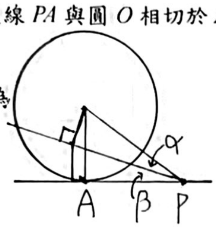
$f_n''(x)=f_{n-1}''(x)\cos(nx)-nf_{n-1}'\sin(nx)-nf_{n-1}'(x)\sin(nx)-n^2f_{n-1}(x)\cos(nx)$

$\Rightarrow f_n''(0)=f_{n-1}''(0)-n^2$，又 $f_1''(0)=-1$

$\Rightarrow |f''(0)|=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ge2025 \Rightarrow n=18$

11. 已知圓 O 的圓心為 O、半徑為 3，直線 PA 與圓 O 相切於 A，直線 PB 與圓 O 交於 B、C 兩點，D 為 $\overline{BC}$ 的中點，若 $\overline{PO}=5$，則 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$ 的最大值為

18



$\boxed{11}$ $4\cdot 5\cos\alpha\cos\beta$

$=2\cdot 5\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)\le 10\left(\frac{4}{5}+1\right)=18$

12. 某校物研社想辦春遊，其中檜意森活村、嘉大昆蟲館、文化路觀光夜市等三個旅遊景點由 7 個幹部投票，不過每個人可以不選或選 1 個、2 個或 3 個景點，投票結果發現，只選 1 個及 2 個景點的各有 3 人，有 1 人不選任何景點。已知沒有任何兩人選的景點完全相同，則任取 3 人，此 3 人選出的景點剛好包含三個景點的機率為

$\frac{23}{35}$

$\boxed{12}$

甲 A　丁 AB

乙 B　戊 AC

丙 C　己 BC

庚 無

$(1,1,1)\to 1$

$(2,2,2)\to 1$

$(2,2,1\text{ or }0)\to C^3_2\cdot 4=12$ $\Rightarrow \frac{23}{35}$

$(2,1,1\text{ or }0)$ $C^3_1\cdot 3=9$ (C^7_3)

AB, C　A or B

13. 若集合 A,B,C 滿足以下條件：

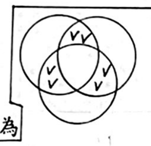
(1) $A,B,C\subseteq\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

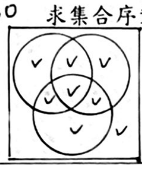
(2) $|A\cap B|=|B\cap C|=|C\cap A|=2$

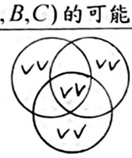
(3) $|A|=|B|=|C|=4$

45360 求集合序對 (A,B,C) 的可能情形數為

$\boxed{13}$







$8!+C^8_2C^6_2C^4_2\cdot 2$

$=7!(8+1)=45360$

$\boxed{14}$ $P(X=k)\ge P(X=k+1)$　$P(X=k)\ge P(X=k-1)$

$C^n_k p^k(1-p)^{n-k}\ge C^n_{k+1}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}$　$C^n_k p^k(1-p)^{n-k}\ge C^n_{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}$

$\Rightarrow (k+1)(1-p)\ge(n-k)p$　$\Rightarrow (n-k+1)p\ge k(1-p)$

$\Rightarrow k\ge(n+1)p-1$　$\Rightarrow k\le(n+1)p$

16 or 17 14. 已知隨機變數 $X\sim B(101,\frac{1}{6})$，當 $k=$______時，機率 $P(X=k)$ 有最大值。

$\Rightarrow 16\le k\le 17$

15. 若 m,n 為正整數，方程式 $x^4+5x^3+mx^2+nx+4=0$ 的四根中，有兩相異實根和為 -5，則此方程式的最小可能實根為

$\frac{-5-\sqrt{21}}{2}$

$\boxed{15}$ $\alpha,\beta,\gamma,-\gamma$

$4=\alpha\beta(-\gamma^2)$

$n=(\alpha+\beta)\gamma^2=-5\gamma^2\in\mathbb{N}\Rightarrow\gamma^2<0$

$m=\alpha\beta-\gamma^2\in\mathbb{N}$

$-4=(\alpha\beta)\gamma^2$

$1\cdot(-4)$

$2\cdot(-2)$

$4\cdot(-1)$

$x^2+5x+1=0$ $\Rightarrow\frac{-5-\sqrt{21}}{2}$ ✓

$+2$　$\frac{-5-\sqrt{17}}{2}$

$+4$　$\frac{-5-\sqrt{9}}{2}$

二、計算證明題：(共 10 分) 需有計算過程。

坐標平面上有一 ΔOAB，其中 O 為原點，A、B 在第一象限，$\overline{OA}=\overline{OB}=40$，$\overline{AB}=20$，若 A、B 經矩陣

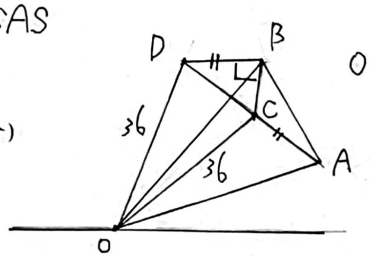
$$\begin{bmatrix}\frac{9}{10}\cos\theta & -\frac{9}{10}\sin\theta\\ \frac{9}{10}\sin\theta & \frac{9}{10}\cos\theta\end{bmatrix}$$

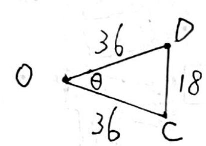
依序變為 C、D。若 C 在 ΔOAB 內，D 在第二象限且 $\angle OBC+\angle OAC=90°$。

(1) SAS

(1) 證明：$\Delta OAC\cong\Delta OBD$ (5 分)

324 (2) 求 $\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$ 之值為__________。(5 分)





$18^2=324$ #