2025.8.22(五)~8.26(二) Ru

$\boxed{1}$ $A(1,0,1)$

國立鳳新高級中學114學年度第1次教師甄選

$1-\frac{1}{3}\cdot 1,\ 0-\frac{1}{3}\cdot(-1),\ 1-\frac{1}{3}\cdot 2$

【數學科】試題

$-1-(-\frac{1}{3})\cdot 1 \quad 2-(-\frac{1}{3})\cdot(-1) \quad 1-(-\frac{1}{3})\cdot 2$

$V_A=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \Rightarrow A'(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}) \quad B(2,1,0)\in E \quad C(-1,2,1) \Rightarrow C'(\frac{-2}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3}) \quad D(1,1,3) \quad V_D=\frac{5}{6}$

【 計算證明題 】 $\Rightarrow M_1: \frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}=t \quad V_C=\frac{-2}{6}=\frac{-1}{3} \quad D'(\frac{1}{6},\frac{11}{6},\frac{8}{6}) \Rightarrow M_2: \frac{x+\frac{2}{3}}{5}=\frac{y-\frac{5}{3}}{1}=\frac{z-\frac{5}{3}}{-2}$

（每題10分，共100分，需寫出計算過程或證明理由，否則將酌以扣分）

$(6,3,-1) \quad P(4t+2,2t+1,-t) \quad (2t+1-\frac{5}{3})(-2)=-t-\frac{5}{3} \Rightarrow t=1 \Rightarrow (6,3,-1)$

1. 設直線 $L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$，直線 $L_2:\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2}$ 為兩歪斜直線，

   平面 $E:x-y+2z-1=0$，試求直線 L_1 與直線 L_2 在平面 E 的投影直線 M_1 與 M_2 的交點坐標。

2119

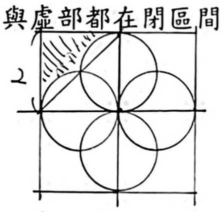
2. 將 1,2,3,4,5,6,7 排成一列，若規定排列後不得出現 12,23,34,45,56,67（如：1273546 不合題意，7362154 符合題意），則有多少種排法？

$\boxed{2}$ $7!-C^6_1\cdot 6!+C^6_2 5!-C^6_3 4!+C^6_4\cdot 3!-C^6_5\cdot 2!+C^6_6$

$12-2\pi$

3. 已知複數 z 滿足 $\frac{z}{2}$ 與 $\frac{2}{z}$ 的實部與虛部都在閉區間 $[-1,1]$ 上，試求 z 在複數平面上所成的軌跡的面積。

$\boxed{3}$ 令 $z=a+bi$, $a,b\in[-2,2]$ $\quad -1\le\frac{2a}{a^2+b^2}\le 1 \Rightarrow (a+1)^2+b^2\ge 1,\ (a-1)^2+b^2\ge 1$



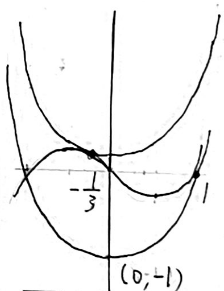
$(2-(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2})\cdot 2)\cdot 4$
$=12-2\pi$

$[\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$

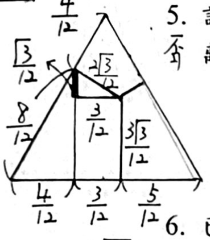
4. 設 $a\in\mathbb{R}$，若 $y=x^3-x$ 與 $y=x^2-a^2+a$ 有公切線，試求 a 的範圍。

$\boxed{4}$ 設 $x^3-x-x^2+a^2-a=(x-\alpha)^2(x-\beta) \Rightarrow 3\alpha^2-2\alpha+1=0 \quad -a^2+a\ge -1 \Rightarrow [\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$

$\Rightarrow \begin{cases}2\alpha+\beta=1\\ \alpha^2+2\alpha\beta=1\end{cases} \Rightarrow \alpha^2+2\alpha(1-2\alpha)=1 \quad \begin{matrix}3 & +1\\ 1 & -1\end{matrix} \Rightarrow \alpha=1 \text{ or } -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow a^2-a-1\le 0$



$\boxed{5}$ 否



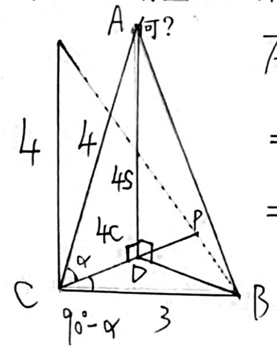
5. 設 P 為正三角形 ABC 的內部一點，三角形邊長為 1，若 P 依序到三邊 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 的距離比分別為 1:3:2，試判斷 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ 是否會大於 2？

$\frac{1}{12}(\sqrt{76}+\sqrt{52}+\sqrt{28})=\frac{\sqrt{19}+\sqrt{13}+\sqrt{7}}{6}<\frac{5+4+3}{6}=2$

$\sqrt{13}$

6. 已知△ABC 中，∠C=90 度，$\overline{BC}=3$，$\overline{AC}=4$，P 點為斜邊 $\overline{AB}$ 上的動點，現在沿著 $\overline{CP}$ 將△BCP 折起來，使折起來後的平面 BCP 垂直平面 ACP，則折起來後的 $\overline{AB}$ 最小值為何？

$\boxed{6}$



$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2$ thepiano

$=16+9-2\cdot 4c\cdot 3\cdot s$

$=25-12\sin(2\alpha)\ge 13 \Rightarrow \sqrt{13}$

補: 114雄中: 二階方陣A滿足 $A^T=A^{-1} \Rightarrow \cdots$ 令 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ $A^TA=I$ (正交矩陣)

$\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2+c^2&ab+cd\\ab+cd&b^2+d^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\cdots$

國立鳳新高級中學 114 學年度第 1 次教師甄選

【數學科】試題

$\begin{pmatrix}\det(R_\theta)=1\\ \det(M_\theta)=-1\end{pmatrix}$

$\boxed{7}$

7. 設P為平面上任意一點，O為原點，若二階方陣 A 將P對應到Q且$\overline{PO}=\overline{QO}$，以高中數學內容證明: A 必為平面變換中的旋轉矩陣或鏡射矩陣。

$\begin{bmatrix}ax+by\\cx+dy\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

$\overline{PO}^2=\overline{QO}^2 \Rightarrow x^2+y^2=(a^2+c^2)x^2+(b^2+d^2)y^2+2(ab+cd)xy$

$\Rightarrow \begin{cases}a^2+c^2=1 \\ b^2+d^2=1\\ ab+cd=0\end{cases} \leftarrow c=\dfrac{-ab}{d}$ $\Rightarrow a^2\cdot\left(\dfrac{b^2+d^2}{d^2}\right)=1$

$\Rightarrow a=-d$ or $a=d$

$\Rightarrow b=c$ $\Rightarrow b=-c$

$A=\begin{bmatrix}a&b\\b&-a\end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix}a&-c\\c&a\end{bmatrix}$ #

8. 若 x、y 為正數，且 $x^2+\dfrac{y^2}{45}=1$，則試求 $\dfrac{2}{1-x}+\dfrac{75}{10-y}$ 之最小值。

Hawlee ≥

$\dfrac{2}{1-x}+\dfrac{75(10-y+y)}{10(10-y)}=\dfrac{2}{1-x}+\dfrac{15}{2}\cdot\dfrac{y}{10-y}+\dfrac{15}{2}\geq\dfrac{\frac{x^2}{2}}{\left(\frac{1-x+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}}{3}\right)^3}+\dfrac{15}{2}\cdot\dfrac{y^2}{\left(\frac{10-y+y}{2}\right)^2}+\dfrac{15}{2}=\dfrac{27}{2}x^2+\dfrac{15}{2}\cdot\dfrac{y^2}{5\cdot5}+\dfrac{15}{2}$

$=\dfrac{27}{2}\left(x^2+\dfrac{y^2}{45}\right)+\dfrac{15}{2}=21$

$\boxed{9}$ 令 $f(x)=x+1-\frac{\pi}{4}-\tan x$, $f'(x)=1-\sec^2x=\tan^2x \geq 0$

9. 令 $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$，其中 n 為正整數，試回答下列各問題：

(1) 試證明：當 $0\leq x\leq\dfrac{\pi}{4}$ 時，$\tan x\leq x+1-\dfrac{\pi}{4}$。(2 分)

(1) (2) 當 $0\leq x<\frac{\pi}{4}$, $0\leq\tan x<1$

(2) 試求 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$ 之值。(2 分) 0

(3) 請用 n 表示 I_n+I_{n+2} 之值。(1 分) $\dfrac{1}{n+1}$

(4) 利用 (3) 的結果計算 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n}$。(5 分) $\ln\sqrt{2}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\sec^2x\,dx=\int_0^1u^n\,du=\frac{1}{n+1}$

(4) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{8}+\cdots$ $(I_n\to0)$

$=I_1+I_3-(I_3+I_5)+(I_5+I_7)\cdots=I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$

$=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}\,dx=-\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=\ln\sqrt{2}$

$\boxed{10}$

$x^3+tx^2+vx+1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

令 $y^3+ay^2+by+1=0$ 之3根為 $\alpha^{\frac{1}{3}},\beta^{\frac{1}{3}},\gamma^{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow y^3+1=-y(ay+b)$

$\Rightarrow (y^3+1)^3=-y^3(a^3y^3+b^3+3aby(ay+b))=-y^3(a^3y^3+b^3-3ab(y^3+1))$

$\Rightarrow (x+1)^3=-x(a^3x+b^3-3ab(x+1))=(-a^3+3ab)x^2+(3ab-b^3)x$

$\Rightarrow x^3+\underbrace{(3+a^3-3ab)}_{t}x^2+\underbrace{(3+b^3-3ab)}_{v}x+1=0$ 令 $z=ab$

$z^3=a^3b^3=(3z+t-3)(3z+v-3)$

$=(3z+t-3)(3z-t-6)$

$\Rightarrow z^3=9z^2-27z-(t^2+3t+9)+27$

$\Rightarrow (z-3)^3=-(t^2+3t+9)$

$\Rightarrow z=3-\sqrt[3]{t^2+3t+9}$

所求 $=-a=-\sqrt[3]{t+3z-3}$

$=-\sqrt[3]{t+6-3\cdot\sqrt[3]{t^2+3t+9}}$

$=\sqrt[3]{-t-6+3\cdot\sqrt[3]{t^2+3t+9}}$

寸絲

10. (1) 試證明已知 α、β、γ 為三實數，假設 $t=-(\alpha+\beta+\gamma)$，$v=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$，且滿足 $\alpha\beta\gamma=-1$、$t+v=-3$，則

$$\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}+\gamma^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{(-t-6)+3\sqrt[3]{t^2+3t+9}}。$$

(5 分)

(2) (2) 利用 (1) 的結果，試證明

$\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}=\frac{-1}{8}$

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{9}}=\sqrt[3]{\frac{3}{2}(\sqrt[3]{9}-2)}。$$

(5 分)

$(t=0)$

$\sqrt[3]{2\cos\frac{2\pi}{9}}+\sqrt[3]{2\cos\frac{4\pi}{9}}+\sqrt[3]{2\cos\frac{8\pi}{9}}=\sqrt[3]{-6+3\cdot\sqrt[3]{9}}$

$\Rightarrow\cdots$ #