臺北市立大直高級中學 114 學年度第 1 次專任教師甄選 高中數學科 筆試試題
(共兩頁)

Ru

請將答案按題號順序寫在答案卷上。計算與證明題須詳附推論過程，否則不予計分。

2025.8.20(三) 範圍：高中數學及教學專業知能

$\boxed{1}$ $a_0=25,\ a_1=25+(-1+6),\ a_2=25+(-1+6)\times 2\cdots a_{200}=25+5\times 200=1025$

~8.21(四) 一、填充題 (共 9 題，每題 6 分)

$b_0=4,\ b_1=2(4-1)+1,\ b_2=2(2\cdot 3)+1,\cdots b_{200}=3\cdot 2^{200}+1$

1. 給定一數列：1, 9, 9, 6。進行如下操作：對每兩個相鄰的數做一次減法，由右邊的數減去左邊的數，並把差寫在這兩個項的中間，此時完成第一輪操作，且產生 7 個數構成的數列：1, 8, 9, 0, 9, −3, 6。接著對此新的數列再做一次如同上述規定的操作，此為第二輪操作，且得到 13 個數的數列：1, 7, 8, 1, 9, −9, 0, 9, 9, −12, −3, 9, 6。同樣的操作共進行 200 次，到第 200輪 為止。試問，若到第 200 輪時，此數列各項的總和為 a，且此數列共有 b 項，則數對 $(a, b)=$____________。

$(1025, 3\times 2^{200}+1)$

令 $\alpha=\tan^{-1}\frac{1}{a}$，$\beta=\tan^{-1}\frac{1}{b}$，$\gamma=\tan^{-1}\frac{1}{c}$ $\boxed{(2,5,8)\text{ or }(8,5,2)}$

$\boxed{2}$

2. 已知正整數 a、b、c 成等差，且 $\tan^{-1}\frac{1}{a}+\tan^{-1}\frac{1}{b}+\tan^{-1}\frac{1}{c}=\frac{\pi}{4}$，則數對 (a, b, c)

$\tan(\alpha+\gamma)=\tan(\frac{\pi}{4}-\beta)\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{c}\Big/1-\frac{1}{a}\frac{1}{c}=1-\frac{1}{b}\Big/1+\frac{1}{b}$　$\frac{a+c}{ac-1}=\frac{b-1}{b+1}\Rightarrow abc-(ab+bc+ca)+1=a+b+c\Rightarrow(a-1)(b-1)(c-1)-2(a+b+c-3+3)+2=0$

$(u-d)u(u+d)-2\cdot(3u)-4=0$

$\boxed{3}$ 64

3. 袋中有 25 張大小相同的卡片，分別記上 log 1、log 2、log 3、...、log 25，從袋中任意取一張卡片。假設每張卡片被取到的機會都相同，取出的卡片為 $\log k$，其中 k 為正整數 1 到 25 中任意一數。若此試驗重複做 100 次，且每次取完後卡片放回袋中，則這 100 次所取出的 $\log k$ 中，可表示成 $a\log 6+b\log 15+c$（a、b、c 為有理數）的次數期望值為____________。(舉例：如 $\log 24=2\log 6-\log 15+1$，但 $\log 14=\log(2\times 7)$ 則不能表示為 $a\log 6+b\log 15+c$)

$u^3\cdots-4=0$　$u=4$ or $1\ldots 2$　$16-d^2=7$ 不合　$\Rightarrow d=\pm 3$　1, 4, 7 $\Rightarrow$ 2, 5, 8

$2^x\cdot 3^y\cdot 5^z\cdot k$

不合：13, 17, 19, 23 $\Rightarrow 9$個　$7\times\frac{1}{3}$　$11\times\frac{1}{2}$

$\Rightarrow E=100\cdot\frac{16}{25}=64$

$\frac{1}{2}<r<2$

4. 設 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 為平面上兩個非零向量，且 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 的夾角為 60°，令 $r=\dfrac{|\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}|}{|2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|}$，則 r 的範圍為 $\boxed{4}$

一開始用判別式 G.G.

$r^2=\frac{|\vec a|^2+2|\vec a||\vec b|+4|\vec b|^2}{4|\vec a|^2+2|\vec a||\vec b|+|\vec b|^2}=\frac{4t^2+2t+1}{t^2+2t+4}$　$t=\frac{|\vec b|}{|\vec a|}\in(0,\infty)$　$r^2=4-3\cdot\frac{2t+5}{t^2+2t+4}$ is increasing on $(0,\infty)$

$\Rightarrow r^2\in(\frac{1}{4},4)$

$\Rightarrow r\in(\frac{1}{2},2)$

$\frac{53}{126}$

5. 若一袋中有 2 個白球、3 個紅球、4 個黑球，每一球被取中的機會均等，則一次取出四球，恰為二色的機率為 $\boxed{5}$ $1-\frac{C^4_4+C^2_1C^3_1C^4_2+C^2_1C^3_2C^4_1+C^2_2C^3_1C^4_1\ldots}{C^9_4}=\frac{53}{126}$

3

6. 設 a、b、c 為多項式 $x^3-8x^2+8x-1=0$ 的三個根，對於每一個非負整數 n，$S_n=a^n+b^n+c^n$，則 S_{2025} 的個位數為 $\boxed{6}$ $S_{n+3}=8(S_{n+2}-S_{n+1})+S_n$

k	0	1	2	3	4	5	6	⋯
S_k	3	8	$64-16\to 8$	3	8	8	3	⋯

$2025\equiv 0\pmod 3$ $\Rightarrow 3$ #

$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$

7. 以 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$ 的焦點為焦點，且過直線 $L: x-y+9=0$ 的一點 M 作一橢圓。欲使橢圓的長軸最短，則橢圓的方程式為 $\boxed{7}$ $F(\pm 3,0)$　$b^2=d(F_1,L)\cdot d(F_2,L)=\frac{12\times 6}{2}=36\Rightarrow\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$

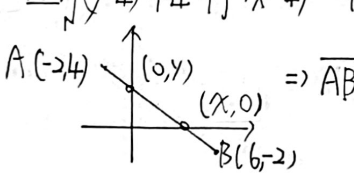
10

8. 若 $x, y\in\mathbb{R}$，則 $\sqrt{y^2-8y+20}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-12x+40}$ 之最小值為____________。

$\frac{8-4\sqrt{2}}{3}$

9. 若拋物線 $y=x^2$ 與直線 $y=mx$（$0<m<2$）在 $x\in[0, 2]$ 所圍成的區域面積為 R，則 R 的最小值 =____________。

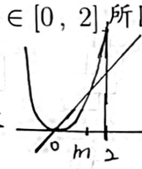
$\boxed{8}$ $\sqrt{(y-4)^2+4}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-6)^2+4}$



$\Rightarrow\overline{AB}=10$

請接下一頁繼續作答

$\boxed{9}$



$x^2=mx$

$f(m)=\int_0^m(mx-x^2)dx+\int_m^2(x^2-mx)dx$

$=\frac{m^3}{2}-\frac{m^3}{3}+\frac{8}{3}-\frac{m^3}{3}-\frac{4m}{2}+\frac{m^3}{2}$

$=\frac{m^3}{3}-2m+\frac{8}{3}$，$f'(m)=0$，$f''(\sqrt{2})>0$

$\Rightarrow f(\sqrt{2})=\frac{8-4\sqrt{2}}{3}$

[1] $\frac{1}{a}<\frac{5}{7}<\frac{3}{a}$ $\Rightarrow 1\le a\le 4$

$\begin{cases}a=2\\ \frac{1}{b}<\frac{3}{14}<\frac{2}{b}\end{cases}$ $\Rightarrow 5\le b\le 9$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{70}=\frac{5}{7}$　$\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}=\frac{5}{7}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{21}=\frac{5}{7}$　$b=8$ or $9 \Rightarrow c\notin\mathbb{N}$

$\begin{cases}a=3\\ \frac{1}{b}<\frac{8}{21}<\frac{2}{b}\end{cases}$ $\Rightarrow 4\le b\le 5$ 代入不合

$\begin{cases}a=4\\ \frac{1}{b}<\frac{13}{28}<\frac{2}{b}\end{cases}$ $\Rightarrow b=4$ 不合

二、計算與證明題 (第 1 題到第 3 題每題 10 分，第 4 題 16 分，共計 46 分)

$(2,5,70),(2,6,21),(2,7,14)$

1. 設 a、b、c 為相異的正整數，$a<b<c$，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{5}{7}$，試求數對 (a, b, c)。

[2] 注意到

2. 空間坐標系中三點 $A(a, a^2, a^3)$、$B(b, b^2, b^3)$、$C(c, c^2, c^3)$，其中 $a>b>c>0$。若有一平面 E 過 A、B、C 三點，試證：原點到 E 的距離為 $\dfrac{abc}{\sqrt{(ab+bc+ca+1)^2+a^2+b^2+c^2}}$。

$E: (ab+bc+ca)x-(a+b+c)y+z-abc=0$, $A,B,C\in E \Rightarrow d(O,E)=\sim$ #

3. 在坐標平面上，設 O 為原點，已知拋物線 $\Gamma: y=x^2+2x+1$，直線 L_n 的方程式為 $y=2^{n-2}\cdot x+5$，其中 n 為正整數。設拋物線 Γ 與直線 L_n 交於 A_n、B_n 兩點，則 $\triangle OA_nB_n$ 面積的最小值為何？此時 n 的值為何？

10
$n=3$

4. 小明有一天在一本書上看到一道有趣的問題，問題描述如下：

「有從一年級到六年級的兒童各一人，排成一列領取物品，如果一個高年級的兒童站在低年級的兒童前面，那麼高年級兒童後面所有比他年級低的兒童都會各有一次“怨言”。在一種排列順序裏，我們把”**所有年級的怨言總數”叫『怨言數』**（註：一個人可以有兩次以上的“怨言”）。例如：若兒童的年級排列為 1、4、3、6、2、5，並記為 $(1,4,3,6,2,5)$，則 1 年級有 0 次怨言、4 年級有 0 次怨言、3 年級有 1 次怨言、6 年級有 0 次怨言、2 年級有 3 次怨言、5 年級有 1 次怨言，則此種排列的怨言數為 $0+0+1+0+3+1=5$ 次，亦即 $(1,4,3,6,2,5)$ 為怨言數 =5 的一種排列方法。」

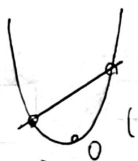
小明決定開始研究這道問題，他從簡化這個問題開始，設兒童總數為 n，若 $n=2$（即只有 1、2 年級各 1 位學生），怨言數為 0 的排列方法數有 1 種，即 $(1,2)$（年級排列方式為 1、2）；怨言數為 1 的排列方法數也有 1 種，即 $(2,1)$（年級排列方式為 2、1），所以

(a) 當 $n=3$ 時，試列出怨言數分別為 0、1、2、3 的排列方法。

(b) 當 $n=4$ 時，試列出怨言數為 2 的排列方法。

(c) 若你欲指導小明以此題進行研究，試以專題寫作的體例，擬出研究主題、研究問題，以及研究步驟及方法。

[3]



$(\alpha, \alpha^2+2\alpha+1)$

$(\beta, \beta^2+2\beta+1)$

$\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\alpha & \alpha^2+2\alpha+1\\ \beta & \beta^2+2\beta+1\end{vmatrix}$

$x^2+(2-2^{n-2})x-4=0$　$=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)(-\alpha\beta+1)$

$\alpha+\beta=2^{n-2}-2$

$\alpha\beta=-4$　$=\frac{5}{2}(\alpha-\beta)$

$(\alpha-\beta)^2=\frac{1}{16}(2^n)^2-2^n+20$

$\cancel{\frac{1}{2}}\ 2^n=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{16}}=8$, $\min=\frac{5}{2}\cdot 4=10$

$n=3$

[4] 怨言數

(a)

	怨言數
1 2 3	0
1 3 2	1
2 1 3	1
2 3 1	2
3 1 2	2
3 2 1	3

(b) 1 4 2 3
2 1 4 3
2 3 1 4
3 1 2 4

試題結束