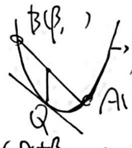
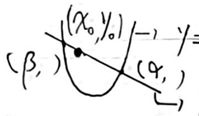
$\boxed{10}$ 說明



$y=ax^2+bx+c$, $y'=2ax+b$

$A(\alpha,\ )$, $B(\beta,\ )$, $Q\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \right)$

性質 $m_{AB}=a(\alpha+\beta)+b=m_Q$ (切線斜率)



$(x_0,y_0)$, $(\beta,\ )$, $(\alpha,\ )$, $y=ax^2+bx+c$, $y=m(x-x_0)+y_0$

$ax^2+(b-m)x+mx_0+c-y_0$
$=a(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta)$

9. 已知函數$f(x)$在區間$[0,1]$中滿足$f(x)+f(1-x)=1$及$f(\frac{x}{4})=\frac{1}{2}\cdot f(x)$，且當$0\le m<n\le 1$時，$f(m)\le f(n)$；若$f(0)=0$，則$f(\frac{1}{2025})=$__________。

$\frac{1}{64}$

$\frac{1}{4}<\frac{1024}{2025}<\frac{1024}{2048}=\frac{1}{2}$

$\boxed{9}$ $f(\frac{1}{4})=\frac{1}{2}=f(\frac{1}{2})\Rightarrow$ 當 $t\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$, $f(t)=\frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2025})=\frac{1}{2^k}f(\frac{4^k}{2025})\overset{(k=5)}{=}\frac{1}{32}\cdot f(\frac{1024}{2025})=\frac{1}{64}$

10. 設有一拋物線$y=x^2-2x-5$，過$A(-1,0)$的一直線$L$與此拋物線所圍成的區域面積有最小值時，求$L$的方程式為__________。

$y=-4(x+1)$

$\boxed{10}$ $y'=2x-2$
$m=2(-1)-2=-4$

中點弦 & 多項式函數圖形 圍出最小面積

$A=-a\left(\frac{1}{3}(\alpha^3-\beta^3)-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\alpha^2-\beta^2)+\alpha\beta(\alpha-\beta)\right)$
$=\frac{-a}{6}(\alpha-\beta)\left(2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-3(\alpha+\beta)^2+6\alpha\beta\right)$
$=\frac{a}{6}(\alpha-\beta)^3$

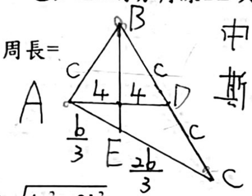
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=\left(\frac{m-b}{a}\right)^2-4\frac{mx_0+c-y_0}{a}$
$=\frac{1}{a^2}\left(m^2-(2b+4ax_0)m+\cdots\right)$

當 $m=2ax_0+b$
$=2a\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+b$
$x_0=\frac{\alpha+\beta}{2}$ 時 有 min

11. 在$\triangle ABC$中，已知$\angle B$的分角線$\overline{BE}$與$\overline{BC}$邊的中線$\overline{AD}$垂直且等長($E$在$\overline{AC}$上)，已知$\overline{BE}=\overline{AD}=8$，求$\triangle ABC$的周長=__________。

$6\sqrt{13}+6\sqrt{5}$

$\boxed{11}$

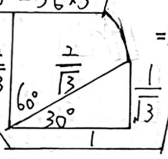


中線 thm $\Rightarrow b^2+c^2=2(c^2+64)\Rightarrow b^2$
斯霍騰 $64=2c^2-\frac{2}{9}(c^2+2\times 64)$
$\Rightarrow c^2\cdot 8=32\times 9+32\times 4\Rightarrow c=2\sqrt{13}\Rightarrow 6\sqrt{13}+6\sqrt{5}$
$b^2=52+128=180=36\times 5$

12. 計算$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{4n^2-3k^2}}{2n^2}=$__________。

$\frac{9+4\sqrt{3}\pi}{36}$

$\boxed{12}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{n}\sqrt{\frac{4}{3}-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1\sqrt{\frac{4}{3}-x^2}\,dx$ $\quad x^2+y^2=\frac{4}{3}$



$\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{9+4\sqrt{3}\pi}{36}$

$\boxed{13}$

13. 設$[x]$表示小於或等於$x$的最大整數，則$\sum\limits_{n=1}^{2025}\left[\frac{2025+2^n}{2^{n+1}}\right]=$__________。

$1012$

$1+2^1+2^2+\cdots+2^9-11$
$=1024-12=1012$ #

$\left[\frac{2^{11}}{2^{n+1}}+\frac{2^n-23}{2^{n+1}}\right]$ 當 $5\le n\le 10$ $\quad 0<\frac{2^n-23}{2^{n+1}}<1$ $\quad a\in\mathbb{N}$ $\quad [a+b]=[a]+[b]$

$n$: $\left[\frac{2^n-23}{2^{n+1}}\right]$ $\quad$ 4: $\left[\frac{-7}{32}\right]=-1$, 3: $\left[\frac{-15}{16}\right]=-1$, 2: $\left[\frac{-19}{8}\right]=-3$, 1: $\left[\frac{-21}{4}\right]=-6$

14. 空間中兩點$A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$之間的"絕對距離"定義如下：$d(A,B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|+|z_1-z_2|$。

已知$s>0$，定義以$A$點和$B$點為焦點的"絕對橢球"為點集合$\{P\,|\,d(P,A)+d(P,B)=s\}$。

則經過點$(1,0,0)$且焦點為$(0,3,0)$與$(0,0,4)$的絕對橢球之體積為__________。

$\frac{118}{3}$

二、計算證明題(配分如各小題，共30分，要有計算或證明過程)

$\boxed{1}$ $5-x^2\ge 0\Rightarrow-\sqrt{5}\le x\le\sqrt{5}$，令 $x=\sqrt{5}\cos\theta$，$\theta\in[0,\pi]\Rightarrow|\sin\theta|=\sin\theta$，$3+\sqrt{5}(\sin\theta+\cos\theta)$ $\quad\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$ $\quad 1$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow[3-\sqrt{5},3+\sqrt{10}]$

1. 設函數$f(x)=x+3+\sqrt{5-x^2}$，求$f(x)$的最大值及最小值。(7分)

$\boxed{2}$ $S\overset{令}{=}x+y+z$

2. 已知實數$x$、$y$、$z$滿足：$(x+y+z)(x+y)(y+z)(z+x)\ne 0$且$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=0$，試求：

(1) $=(x+y+z$
$+\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y})$

(1) $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=?$(6分) $\quad 1$ $\quad -1$ (2) $\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}=?$(6分)

3. 設$k$為正整數，已知兩拋物線$\Gamma_1$：$y=x^2-k$與$\Gamma_2$：$x=-2(y-30)^2+k$有四個相異交點。

$=x\left(\frac{S}{y+z}\right)+y\left(\frac{S}{x+z}\right)+z\left(\frac{S}{x+y}\right)$
$=S\cdot(\quad)$
$\Rightarrow(\quad)=1$

(1) 證明滿足題意的$k$值的最小值為6。(7分)

(2) 當$k=6$，此四個交點座標$(x,y)$皆會滿足$(x-a)^2+(y-b)^2\le r^2$，求$r$的最小值。(4分)

$\boxed{2}$(2) $x(x^2+xy+yz+zx)+y(y^2+xy+yz+zx)+z(z^2+xy+yz+zx)$
$=(x+y)(z^2+xy+yz+zx)$
$\Rightarrow x^3+y^3+z^3+3xyz=2xyz\Rightarrow x^3+y^3+z^3=-xyz\Rightarrow -1$ #