二、計算題（合計 4 題，每題 10 分）

110 南一中 科学班

1. 已知由 $f(x)=-x^2+4x+1$ 及 $g(x)=-x+5$ 兩圖形所圍成之封閉區域 A，若作直線 L 垂直 x 軸，分別與封閉區域 A 的邊界交於 P、Q 兩點，求在封閉區域內的 $\overline{PQ}$ 長之最大值為何？

$\frac{9}{4}$

$\boxed{1}$ 令 $h(x)=f(x)-g(x)=-x^2+5x-4$ $\quad max=\frac{-(25-16)}{4(-1)}=\frac{9}{4}$

2. 設 a、b、p、q 均為實數，如果對任何的實數 x 而言，等式 $(2x+1)^{20}-(ax+b)^{20}=(x^2+px+q)^{10}$ 都能成立，則數對 $(b^{20},p,q)=$？（已知 $2^{20}=1048576$）

$(\frac{1048575}{1048576},1,\frac{1}{4})$

$\boxed{2}$ $a^{20}=2^{20}-1$

$1-b^{20}=q^{10}$

$x=-\frac{1}{2}$: $(\frac{1}{4}-\frac{p}{2}+q)^{10}+(-\frac{a}{2}+b)^{20}=0 \Rightarrow 2p=1+4q$, $a=2b$

$x=-1$: $1-(-a+b)^{20}=1-b^{20}=(1-p+q)^{10}$ —(*)

3. 已知一個圓內接四邊形 ABCD 中可找到一個內切圓，且 E、F、G、H 四點分別為此四邊形 ABCD 與其內切圓相切的四個切點（如圖所示），若 $\overline{FG}=6$、$\overline{EF}=7$、$\overline{EH}=8$，求 $\overline{GH}$ 的長度為何？

$\sqrt{51}$

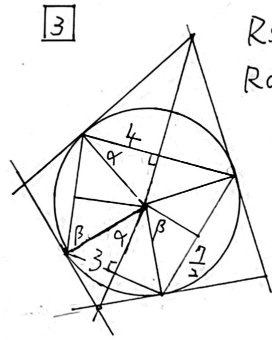
$\boxed{2}$ $b^{20}=\frac{a^{20}}{2^{20}}=\frac{2^{20}-1}{2^{20}}=1-\frac{1}{2^{20}}$

$q^{10}=\frac{1}{2^{20}}=(\pm\frac{1}{4})^{10}$

$\begin{cases} q=\frac{1}{4} \\ p=1 \text{ (ok)} \end{cases}$ or $\begin{cases} q=-\frac{1}{4} \\ p=0 \end{cases}$ (不合)

代入(*) $1-p+q=\frac{1}{4}$ or $-\frac{1}{4}$

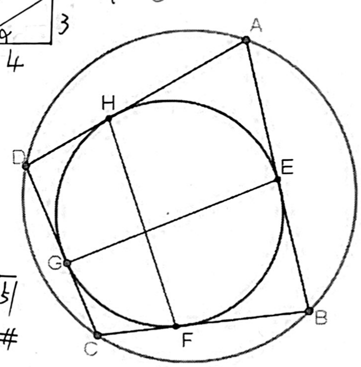
$\boxed{3}$



$R\sin\alpha=3$, $R\cos\alpha=4$ $\Rightarrow$ (5, 3, 4, α) $\Rightarrow R=5$

(10, 7, β) $\sqrt{51}$

$2\cdot5\cdot\frac{\sqrt{51}}{10}=\sqrt{51}$ #



4. 小明在一本書上看到一道試題如下：

> 已知 x、y、p、q 為實數，並且滿足 $2x^2+3p^2=2y^2+3q^2=(xq-yp)^2=6$，求 $(x^2+y^2)(p^2+q^2)$ 的值。

因小明無法知道該題的解法，因此求助於任課老師，請您以學生在中學階段學過的數學概念出發，提供小明至少 4 種解法。

$\boxed{4}$ 法1: 令 $x=\sqrt{3}\sin\alpha$, $p=\sqrt{2}\cos\alpha$, $y=\sqrt{3}\sin\beta$, $q=\sqrt{2}\cos\beta$

$\Rightarrow 6\sin^2(\alpha-\beta)=6$, $\alpha=\beta\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$3(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)\cdot2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)=6$

法2: 令 $\vec{u}=(\sqrt{2}x,\sqrt{3}p)$, $\vec{v}=(\sqrt{3}q,-\sqrt{2}y)$

$36=|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2=(|\vec{u}||\vec{v}|)^2(\cos\theta)^2$

$\Rightarrow \cos^2\theta=1 \Rightarrow \vec{u}\parallel\vec{v}$

令 $\vec{u}=(\square,\triangle)$, $\square^2+\triangle^2=6$

$\Rightarrow (\frac{\square^2}{2}+\frac{\triangle^2}{2})(\frac{\square^2}{3}+\frac{\triangle^2}{3})=6$

法4: $(x+yi)(x-yi)(q+pi)(q-pi)$

$=((xq-yp)+(xp+yq)i)((xq-yp)-(xp+yq)i)$

$(x^2+y^2)(p^2+q^2)=(xq-yp)^2+(xp+yq)^2=6+0=6$

法3: $12=2(x^2+y^2)+3(p^2+q^2)\geq2\sqrt{2\cdot3\square}$

$(x^2+y^2)(q^2+(-p)^2)\geq6$

$\Rightarrow 6\leq\square\leq6 \Rightarrow \square=6$

法2結論 $\vec{u}=\vec{v}$ or $\vec{u}=-\vec{v}$ $\Rightarrow xp+yq=0$

(丟番圖恆等式)