$\boxed{2}$ 設 $x \le y \le n$ $\quad nx+ny=(n-1)xy \quad x=2 \quad (n-2)\mid(2n)-(2n-4) \quad$ $\begin{array}{c|ccc} n & 3 & 4 & 6 \\ y & 6 & 4 & 3 \end{array}$ $\quad x=3 \quad (2n-3)\mid 6n-(6n-9)$

$1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{3}{x}\Rightarrow x\le 3 \quad \Rightarrow y=\frac{nx}{(n-1)x-n} \quad y=\frac{2n}{n-2} \quad n-2=1,2,4,-1 \quad y=\frac{3n}{2n-3} \quad 2n-3=1,3,9,-1$

2025.8.13(三)~8.14(四) Ru

臺北市立陽明高級中學 114 學年度正式教師甄選高中數學科教師甄試試題卷

n	2	3	6
y	6	3(x)	2(x)

一、填充題（合計 12 題，每題 5 分）

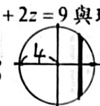
6   1. 設 x、y 均為整數，則$(x+y+2027)^2=x^2+y^2+2027^2$有______組整數解？

$\boxed{1}$ $(x+2027)(y+2027)=2027^2$，質數 p^2 有 $(2+1)\times 2=6$ 個因數

(2,3),(2,4),(2,6),(3,6)   2. 滿足$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{n-1}{n}$，其中 x、y、n 為自然數，且x < y，例如：$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$，則 x=2，y=3 為一組解，以(2,3)表示。

請問此方程式的所有解為 $\boxed{2}$ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{n}=1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

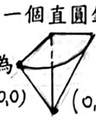
$\frac{11}{3}\pi$ 3. 在空間中，已知平面 E: $x+2y+2z=9$ 與球面 S: $x^2+y^2+z^2=16$ 交於一圓。若球面 S 被平面 E 切成兩塊，求容積較小那一塊的容積為

$\boxed{3}$ $d(O,E)=3$  $\int_3^4 \pi(16-x^2)\,dx=\pi\left(16-\frac{37}{3}\right)=\frac{11}{3}\pi$

$\frac{\pi}{2}$ 4. 試求由 $y=x-x^2$ 及 $y=0$ 所圍成的區域繞著 $x=2$ 旋轉所得到實體之體積為__________。

$\boxed{4}$ shell method $\int_0^1 2\pi(2-x)(x-x^2)\,dx=2\pi\int_0^1(x^3-3x^2+2x)\,dx=\frac{\pi}{2}$ $\left(dV=\pi\left((x+dx)^2-x^2\right)y=2\pi xy\,dx\right)$

(0,0,-2)   5. 在坐標空間中，xz 平面上有一直線 $L:\sqrt{3}x-z-6=0$，將此直線繞 z 軸旋轉得到一個直圓錐面，此圓錐面和 xy 平面圍成一個圓錐體。現將一球塞進此圓錐體中，則此球面半徑最大時的球心坐標為

113大直 $\boxed{5}$  $(2\sqrt{3},0,0)$ $(0,0,-6)$  $\Rightarrow(0,0,-2)$

$\frac{3}{8}$ 6. 現有八枚相同的硬幣，每次至少取 1 枚，一直到取完為止。設每一種取法的機率相等，則在已知第二次取 3 枚的情況下，總共取了四次才取完的條件機率為 ______。(化為最簡分數)

104模考

8   7. 橢圓$\Gamma:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$上相異三點$P(x_1,y_1)$、$Q(4,\frac{9}{5})$、$R(x_2,y_2)$分別至焦點$F(4,0)$的距離成等差數列，求$x_1+x_2$

$\boxed{7}$ $\overline{PF}=a\pm\frac{c}{a}x_1$ $\quad 5-\frac{4}{5}x_1+5-\frac{4}{5}x_2=\frac{9}{5}\times 2\Rightarrow\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{5}{4}\cdot\frac{16}{5}=4$ (or 取 $x_1=x_2=4$)

$(-17\sqrt{3},-17)$ 8. 一個正十七邊形的頂點$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_{17}$皆落在單位圓 C 上，點$P(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$為圓 C 上一點，試求

$2(\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots\overrightarrow{PA_{17}})=$ $\quad \boxed{8}$ $2\sum_{i=1}^{17}\overrightarrow{PA_i}$ $=2\sum_{i=1}^{17}(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA_i})=2\cdot 17\,\overrightarrow{PO}=(-17\sqrt{3},-17)$

109壢中

$\boxed{9}$ $2x^2-3x+2=0$ $\quad x=\frac{3\pm\sqrt{7}i}{4}$

$x^2+x+1=0,\ x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$x^2-x+1=0,\ x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\Rightarrow\frac{5+2\sqrt{3}i+\sqrt{7}i}{4}$

9. 方程式$2x^6-3x^5+4x^4-3x^3+4x^2-3x+2=0$的六個根中，落在複數平面第一象限之所有根的總和為

$\frac{5+2\sqrt{3}i+\sqrt{7}i}{4}$

$\boxed{9}$ $\frac{原式}{x^3}$ 令$t=x+\frac{1}{x}$ $\quad 2(t^3-3t)-3(t^2-2)+4t-3=0\Rightarrow 2t^3-3t^2-2t+3=(2t-3)(t+1)(t-1)=0$

$2025\frac{2025}{2026}$ 10. 設$p=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{2025^2}+\frac{1}{2026^2}}$，則 p=

$\boxed{10}$ $1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{1}{k^2(k+1)^2}\left(k^4+2k^3+k^2+2k^2+2k+1\right)$

$=\frac{(k^2+k+1)^2}{(k(k+1))^2}\Rightarrow\sum_{k=1}^{2025}\left(1+\frac{1}{k(k+1)}\right)=2025+1-\frac{1}{2026}=2026\frac{2025}{2026}$

$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 11. 設$f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{4\cos x+5}}$，其中$x\in R$，試求$f(x)$的值域為

$\boxed{11}$ $-1\le S\le 1$ $\quad 1\le\sqrt{4C+5}\le 3$ $\quad$ 令$f^2=k=\frac{1-C^2}{4C+5}\Rightarrow C^2+4kC+5k-1=0$ $\quad \begin{matrix}4 & -1\\ 1 & -1\end{matrix}$

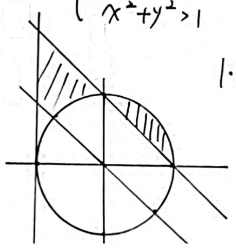
$D\ge 0\Rightarrow 4k^2-5k+1\ge 0\Rightarrow f^2\ge 1$ (不合)

or $f^2\le\frac{1}{4}\Rightarrow[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

$\frac{\pi+4}{8}$ 12. 試求滿足$\log_{(x+y)}y<\log_{(x+y)}\sqrt{1-x^2}$之所有點$(x,y)$所形成圖形的面積為

$\boxed{12}$ $\begin{cases}1-x^2>0\\ y>0\end{cases}$ $\begin{cases}-1<x<1\\ y>0\end{cases}$

$\begin{cases}0<x+y<1\\ x^2+y^2>1\end{cases}$ $\quad \begin{cases}x+y>1\\ x^2+y^2<1\end{cases}$



$1\cdot 1-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

$=\frac{\pi+4}{8}$

$\boxed{6}$

次數	
2	5 3
	4 3 1
	3 3 2
2	1 1 →1
4	2 3 3
	2 1 →2
	1 1 1
	1 3 4
	3 1 →2
8	2 2 →1
	2 1 1
	1 1 1 1

$\Rightarrow\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

【背面尚有試題】