2025.8.3(日) ~ 8.11(一) Ru

宜蘭東旅

國立臺南家齊高級中等學校 114 學年度第一次教師甄選初試數學科題目卷

一、填充題(1~4 題每題 5 分， 5~10 題每題 6 分，11~13 題每題 8 分)

$-\frac{3}{4}$ 1. 設 $a,b,c,d\in R$，若 $a-2b+3c-4d=6$ ，$a^2+4b^2+9c^2+16d^2=12$，求 d 的最小值為_______。

$(12-16d^2)3\geq(4d+6)^2 \Rightarrow (3-4d^2)\cdot 3\geq(2d+3)^2 \Rightarrow 16d^2+12d\leq 0 \Rightarrow -\frac{3}{4}\leq d\leq 0$

289 2. 從 1 到 2025 的自然數中，分別依下列方法得到集合 A 和集合 B ：任選 5 個連續自然數相加，得到的和所形成的集合為 A；任選 7 個連續自然數相加，得到的和所形成的集合為 B。試問集合 A 和集合 B 中有______個相同的元素

$\boxed{2}$ $x+1,\cdots x+5$, $y+1,\cdots y+7$

$A=\{5(x+3)\mid 0\leq x\leq 2020\}$ $\quad A\cap B=\{35k\mid 35\leq 35k\leq 5\times 2023\}$

$B=\{7(y+4)\mid 0\leq y\leq 2018\}$ $\quad 1\leq k\leq 289$

44 3. 令高斯符號 $[a]$ 表示小於或等於 a 的最大整數。已知 $x,y\in R^+$ 且滿足

$\begin{cases}(x+[y])^2=2025.114\\ ([x]+y)^2=2025.1911\end{cases}$，求 $[x-y]$ 的最大值為

$\boxed{3}$ 令 $x=[x]+b$ $\quad y=[y]+a$, $0<b<a<1$

$[x-y]=[[x]-[y]+b-a]$ $\xlongequal{\text{當 }[x]=45,\ [y]=0}$ 44

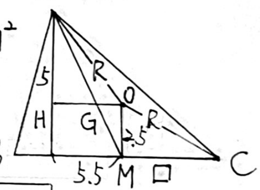
$\frac{2}{9}$ 4. 設 ω 為 $x^3=1$ 的一根，且 $\omega\neq 1$，今擲一公正骰子三次，得到的點數依序為 a,b,c，則 $\omega^a+\omega^b+\omega^c=0$ 的機率為_______

棲蘭山莊 8/4 $\boxed{4}$ $\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3!}{6\cdot 6\cdot 6}=\frac{2}{9}$

14 5. 已知銳角 ΔABC 的垂心為 H，外心為 O，$\overline{BC}$ 之中點為 M。今自頂點 A 向 $\overleftrightarrow{BC}$ 作垂線交於 F，若 $HOMF$ 為矩形且 $\overline{HO}=5.5$，$\overline{OM}=2.5$，則 $\overline{BC}$ 長為

$\boxed{5}$ $\frac{\overline{OG}}{\overline{GH}}=\frac{1}{2}$ $\quad R^2=5^2+5.5^2=2.5^2+\square^2$

$\overline{BC}=2\sqrt{25+24}=14$



$(4\sqrt{2},5-2\sqrt{2})$ 6. 坐標平面上，P 為直線 $L: x+2y=10$ 上一點，$A(1,2)$，$B(4,-7)$，則當 P 坐標為_______時，$\angle APB$ 有最大值

$\boxed{6}$

$\overline{QP}^2=\overline{QA}\cdot\overline{QB} \Rightarrow 5t^2-50t+125=\sqrt{10}\cdot 4\sqrt{10}$

$\begin{cases}x+2y=10\\ 3x+y=5\end{cases} \Rightarrow Q(0,5) \Rightarrow t^2-10t+17=0 \Rightarrow P(4\sqrt{2},\ 5-2\sqrt{2})$

雀客悔夫旅館 8/5

$22-2\sqrt{14}$ 7. 已知 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$，若 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha-4\beta-6\gamma+13=0$，試求 $(\alpha-\delta-8)^2+(\beta-2\delta-9)^2+(\gamma-3\delta-10)^2$ 的最小值為

$\boxed{7}$ $P(\alpha,\beta,\gamma)\in$ 球：$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$ $\quad Q(t+8,\ 2t+9,\ 3t+10)$

$O(1,2,3)$, $(\overline{OQ}-1)^2=\left(((t+7)^2+(2t+7)^2+(3t+7)^2)^{\frac{1}{2}}-1\right)^2$

當 $t=-3$ 時

min $14t^2+84t\cdots=(\sqrt{14}-1)^2$

$=22-2\sqrt{14}$

4 8. 已知曲線 $y=x^4+ax^3+ax^2+x+1$ 在點 $(0,1)$ 的切線，不只在點 $(0,1)$ 與曲線相切，試求 $a=$______。

$\boxed{8}$ $m=f'(0)=1 \Rightarrow L: y=x+1$ $\quad \Gamma-L \Rightarrow x^2(x^2+ax+a)=x^2(x+2)^2 \Leftarrow D=0 \Rightarrow a(a-4)=0 \Rightarrow a=4$

$(12,4)$ 9 $x,y\in R$，已知 $x^2+xy+y^2=6$，若 x^2+y^2 的最大值為 M，最小值為 m，則數對 $(M,m)=$______。

$\boxed{9}$ 令 $x^2+y^2=r^2 \Rightarrow r^2(1+\frac{1}{2}\sin 2\theta)=6$, $M=6/(1-\frac{1}{2})=12$, $m=6/(1+\frac{1}{2})=4$

10. 若點 $P(x,y)$ 與點 Q 對稱於直線 $y=2x+1$，點 Q 對原點 O 逆時針旋轉 45° 得 (x',y')，若 $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e\\f\end{bmatrix}$，求數對 $(a,b,c)=$

$\frac{-7\sqrt{2}}{10}=a$

$\frac{\sqrt{2}}{10}=b$

$\frac{\sqrt{2}}{10}=c$

$\boxed{10}$ $2x-y+1=0$ $\quad V=\frac{1}{5}(2x-y+1)$

$Q: x''=x-2\cdot 2\cdot\frac{2x-y+1}{5}$, $y''=y-2(-1)\cdot\frac{2x-y+1}{5}$

$\frac{1}{5}\left((-3x+4y-4)+i(4x+3y+2)\right)\cdot\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}\left((-7x+y-6)+i(x+7y-2)\right) \Rightarrow \begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{10}\begin{bmatrix}-7&1\\1&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\frac{\sqrt{2}}{10}\begin{bmatrix}-6\\-2\end{bmatrix}$

11. 已知一個非公正硬幣擲出正面機率為$\frac{1}{3}$、反面機率為$\frac{2}{3}$，今連續擲此硬幣，記錄每次擲出的結果，

$\frac{33}{2}$ 每次結果互不影響，令隨機變數X表示第一次看到正面、反面、正面依序出現所需的投擲次數，

則X的期望值為 $\boxed{11}$ 反 正$\boxed{正}$ 正反反

$$E=\frac{2}{3}(E+1)+\frac{1}{9}(E+1)+\frac{4}{27}(E+3) \Rightarrow E=\frac{18+3+12}{27-18-3-4}=\frac{33}{2}$$

12. 丟一顆公正骰子n次，第k次出現的點數為a_k，$k=1,2,3,\cdots,n$。令$S_n=\sum_{k=1}^{n}(6k-a_k)^5$，求

1296 $\boxed{12}$ $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^6}=$ ______。

$$\frac{\sum(6k-6)^5}{n^5}\le\frac{S_n}{n^6}\le\frac{\sum(6(k-1))^5}{n^6}<\frac{\sum(6k)^5}{n^6}$$

右 $=6^5\frac{1}{n}\sum\left(\frac{k}{n}\right)^5\to 6^5\int_0^1 x^5dx=6^4$ ← 左 $\Rightarrow 6^4=1296$

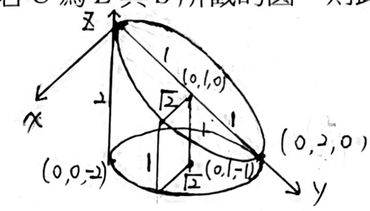
13. 空間中一球面$S:x^2+y^2+z^2=4$，一平面$E:y-z=2$，若C為E與S所截的圓，則此圓C在xy平面投影的曲線方程式為

$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{1}=1\\ z=0\end{cases}$

$\boxed{13}$ $x^2+y^2+(y-2)^2=4$

$\Rightarrow x^2+2(y-1)^2=2$

$\Rightarrow \frac{x^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{1}=1$



二、計算證明題(共 20 分)

1. 已知實數a,b滿足$a+b\ge3$，試證：$|a-2b^2|+|b-2a^2|\ge6$。(限用現行高中課綱內的方法)(8 分)

2. 坐標平面上，Γ: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$，$O$為原點，$P$為$\Gamma$上一點，過$P$點作$\Gamma$的的切線$L$，若$O$在$L$上的投影點為$N$，求$\Delta OPN$面積的最大值，此時$P$點坐標為何？(12 分)

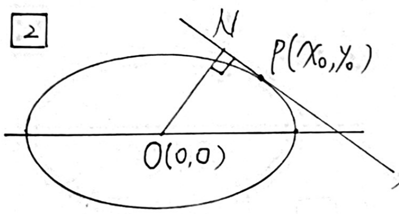
$\left(\frac{\pm16}{5},\frac{\pm9}{5}\right)$

$(a^2+b^2)(1+1)\ge(a+b)^2>a+b$

$\boxed{1}$ 原式 $\ge|a+b-2(a^2+b^2)|=|(a^2+b^2)(1+1)-(a+b)|\ge(a^2+b^2)(1+1)-(a+b)\ge(a+b)^2-(a+b)$

$=(a+b)(a+b-1)=6$

$\boxed{2}$



$\Gamma: Bx^2+Ay^2=AB$

$L:(Bx_0)x+(Ay_0)y-AB=0$

令 $V=\frac{-AB}{B^2x_0^2+A^2y_0^2}$

$$2\Delta=\left|\begin{vmatrix}-(Bx_0)V & -(Ay_0)V\\ x_0 & y_0\end{vmatrix}\right|$$

$$=\frac{AB(A-B)}{B^2x_0^2+A^2y_0^2}|x_0y_0|$$

$$\le\frac{AB(A-B)}{2AB}\cdot\frac{|x_0y_0|}{|x_0y_0|}=\frac{A-B}{2}$$

"=" holds $\Leftrightarrow B^2x_0^2=A^2y_0^2$

$\Rightarrow x_0^2=\frac{A}{1+\frac{B}{A}}=\frac{16}{1+\frac{9}{16}}\Rightarrow x_0=\pm\frac{16}{5}$

$y_0^2=\frac{B}{\frac{A}{B}+1}=\frac{9}{\frac{16}{9}+1}\Rightarrow y_0=\pm\frac{9}{5}$

8/11 星巴克 (一)