新竹市立香山高級中學 114 學年度第 2 次教師甄選題目卷

科目：高中數學科

一、 單選題(每題 4 分，共計 60 分)

1. 設 m 為實數且 $m\neq 2$，如果二次方程式 $(m-2)x^2+(m^2-4m+3)x-(6m^2-2)=0$ 有二實根，且二根的立方和為 0，則 m 值為下列何者?

(A) $-2\sqrt{13}$ (B) 1 (C) 3 (D) $\sqrt{13}$ (E) $2\sqrt{13}$

2. 令 n 為正整數，在坐標平面上，如果直線 $y=-\dfrac{n}{n+1}x+\dfrac{1}{n+1}$，分別交 x 軸與 y 軸於 A_n, B_n 二點，且 O 為原點。若直角三角形 A_nOB_n 的面積為 S_n，則 $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{2023}+S_{2024}+S_{2025}$ 之值為下列何者?

(A) $\dfrac{1012}{2025}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{2023}{4048}$ (D) 1 (E) $\dfrac{2025}{4052}$

3.直角 ΔABC 中，$\angle ACB=90°$，如果 P 為 ΔABC 內部一點，使得 $\overline{PA}=10, \overline{PC}=6$，且 $\angle APB=\angle BPC=\angle APC$，則 $\overline{PB}$ 長為下列何者?

(A) 16 (B) 24 (C) 30 (D) 32 (E) 33

4. 化簡 $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{2025}-\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{2024}-\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{2023}-8\times\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}\right)+4$ 的值為下列何者?

(A) $-4\left(\sqrt{5}+1\right)$ (B) $-4\sqrt{5}$ (C) $-2\left(\sqrt{5}+1\right)$ (D) $-\left(\sqrt{5}+1\right)$ (E) $4\sqrt{5}$

5. 已知 ΔABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，且 $\angle B$ 的角平分線交 $\overline{AC}$ 於 D 點，且 $\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{AD}$，則 $\angle A$ 的度數為下列何者?

(A) $\dfrac{\pi}{3}$ (B) $\dfrac{4\pi}{9}$ (C) $\dfrac{5\pi}{9}$ (D) $\dfrac{2\pi}{3}$ (E) $\dfrac{7\pi}{9}$

6. 試問無窮級數 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\ln(1-\frac{1}{n^2})$ 必為下列何者?

(A) 級數收斂且其值為 $-\ln 2$ (B) 級數收斂且其值為 -1 (C) 級數收斂且其值為 0
(D) 級數收斂且其值為 $\ln 2$ (E) 級數收斂且其值為 1

7. 已知數列 $a_n=6^n+8^n$，其中 $n=1, 2, 3,\cdots$，則 a_{83} 除以 49 之餘數為下列何者?

(A) 27 (B) 35 (C) 37 (D) 42 (E) 45

8. 已知 $\{a_n\}$ 為等比數列，對任意正整數 n，都有 $a_n>0$，且令 $S_n=\log a_1+\log a_2+\cdots+\log a_n$。如果 $S_m=S_n$，其中 m, n 為相異正整數，則此時 S_{m+n} 之值為下列何者?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

9. 已知二角 $\angle A=25^\circ, \angle B=20^\circ$，則 $(1+\tan A)(1+\tan B)$ 之值為下列何者?

(A) $\sqrt{3}$ (B) 2 (C) $1+\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$ (E) 3

10. 設n為正整數，如果n為 15 之所有正整數倍數中，它滿足每一位數字皆為 0 或 8，且n為 15 之最小倍數，又m表示此最小倍數n之每一位數字之和，則$m+\dfrac{n}{15}$之值為下列何者?

(A) 616 (B) 618 (C) 620 (D) 622 (E) 624

11. 已知ΔABC中，$\overline{AB}=\overline{AC}=15$，在$\overline{BC}$邊上取一點$D$，其中$D$異於$B,C$。過$D$點，作$\overline{DE}//\overline{AB}$，交$\overline{AC}$於$E$點，且過$D$點，作$\overline{DF}//\overline{AC}$，交$\overline{AB}$於$F$點，則四邊形$AEDF$之周長為下列何者?

(A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 30 (E) 40

12. 設a,b,c皆為大於 1 之正數，且x為正數，如果$\log_a x=24, \log_b x=40, \log_{abc} x=12$，則$\log_c x$之值為下列何者?

(A) 20 (B) 24 (C) 30 (D) 40 (E) 60

13 .如果$x>0$，則方程式$\sqrt[4]{x}=\dfrac{12}{7-\sqrt[4]{x}}$所有正實數解$x$之和為下列何者?

(A) 25 (B) 91 (C) 256 (D) 337 (E) 1267

14. 已知$A(2,2,0), B(-1,0,2), C(0,4,3)$為空間中三點，則$\Delta ABC$的面積為多少？

(A) 7 (B) $\dfrac{15}{2}$ (C) 8 (D) $\dfrac{17}{2}$ (E) 9

15. 試問極限$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\int_2^{2+h}\sqrt{1+t^2}\,dt$之值為下列何者?

(A) 1 (B) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (C) 2 (D) $\sqrt{5}$ (E) $2\sqrt{5}$

二、 多選題(每題 8 分，共計 40 分;每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題的選項獨立判斷，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題$\dfrac{5-2k}{5}$的分數，但分數低於零分或所有選項均未作答，該題以零分計算。)

16. 已知a,b,c皆為整數，如果二次多項式x^2+ax+b與x^2+bx+c的最大公因式為$x+1$，且最小公倍式為x^3-4x^2+x+6，則下列哪些選項是正確?

(A) $a=-2$ (B) $a=-1$ (C) $a+b=-4$ (D) $a+c=-4$ (E) $a+b+c=-6$

17. 已知三角形ABC之三邊長為連續正整數，如果最大角的度數是最小角度數的 2 倍，則下列哪些選項是正確?

(A) 最小的邊長為 3 (B) 最小的邊長為 4 (C) 周長為 12 (D) 周長為 15 (E) 周長為 18

18. 已知a,b皆為整數，且滿足條件，$5(a^2+ab+b^2)=7a+14b$，則下列哪些選項是正確?

(A) $a+b=-1$ (B) $a+b=0$ (C) $a+b=2$ (D) $a+b=3$ (E) $a+b=4$

19. 已知一多項式$f(x)=x^{2025}(x^2+ax+b)$，其中a,b 為實數，如果將$f(x)$ 除以$(x-2)^2$，得到餘式為$2^{2025}(x-2)$，則下列哪些選項是正確?

(A) $a+b=-1$ (B) $a+b=0$ (C) $a+b=1$ (D) $a^2+b^2=8$ (E) $a^2+b^2=13$

20. 試問下列何者恆為正確?

(A) 已知 V 為 n 維實數空間 $\mathbf{R}^n$ 的子空間(subspace)，如果 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 為 $\mathbf{R}^n$ 的向量，且 $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ 為線性獨立(linearly independent), 其中 k 為正整數，且 $k < n$ ，則 $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ 必為 V 的一組基底(basis)。

(B) 已知 $\mathbf{A}$ 為 n 階方陣，如果 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 為 $\mathbf{R}^n$ 的一組基底，則 $\{\mathbf{A}v_1, \mathbf{A}v_2, \ldots, \mathbf{A}v_n\}$ 亦為 $\mathbf{R}^n$ 的一組基底。

(C) 令 $V = \mathrm{Span}(\{(1,0,2,3), (0,1,1,1), (1,1,4,4), (2,-2,1,2)\})$, 則 $\dim V = 4$.

(D) 已知 V 與 W 皆為 $\mathbf{R}^n$ 的子空間，如果 $\dim V = \dim W$ ，則 $V = W$

(E) 設 V 為 n 維實數空間 $\mathbf{R}^n$ 的子空間，且 $V \neq \{0\}$ ，則 V 必存在有一組基底。